Programa del Diploma

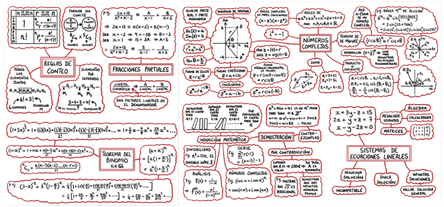
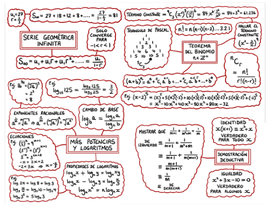
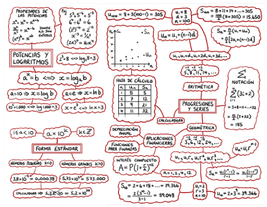
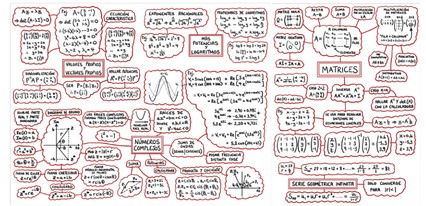
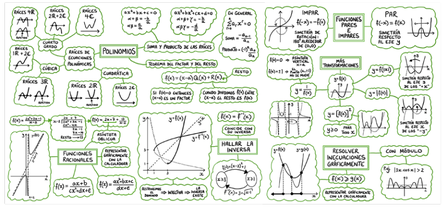
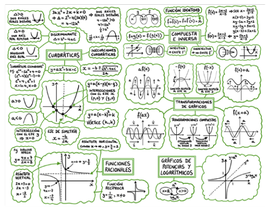
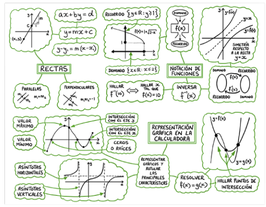
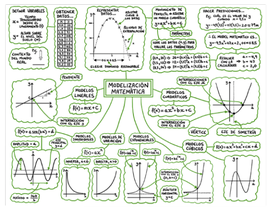
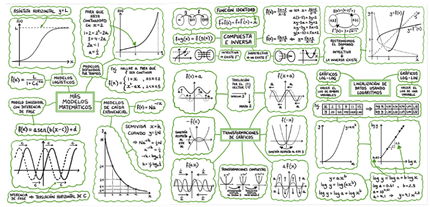
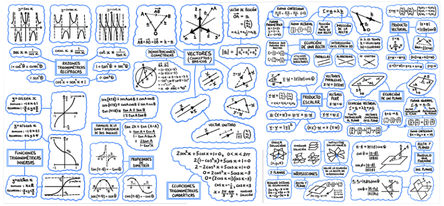
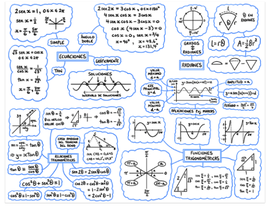
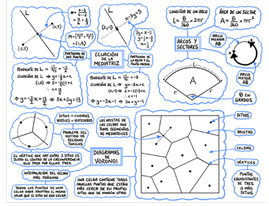
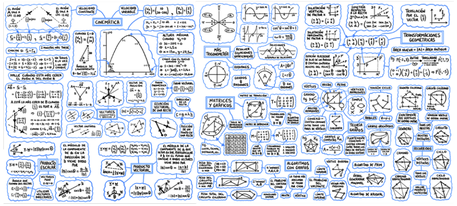
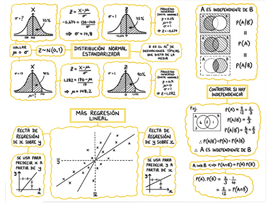
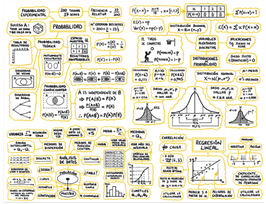
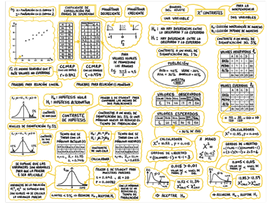
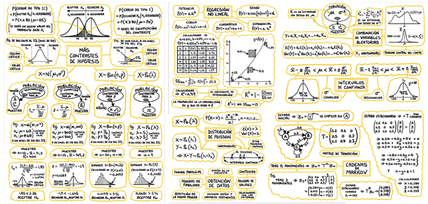
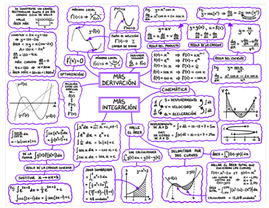
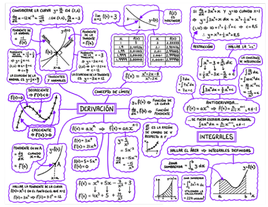
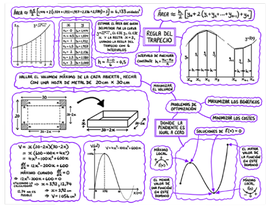
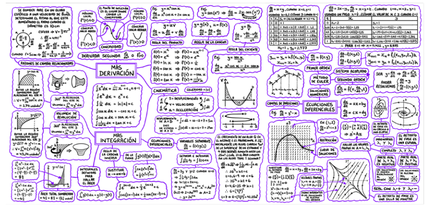
Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

© International Baccalaureate Organization 2019
International Baccalaureate® | Baccalauréat International® | Bachillerato Internacional®

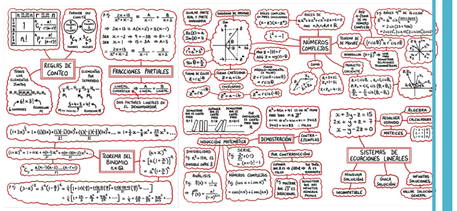
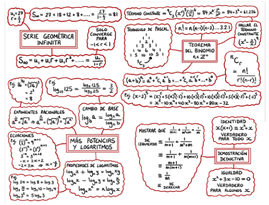
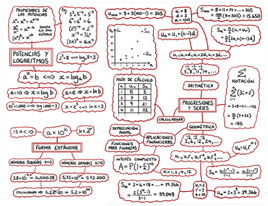
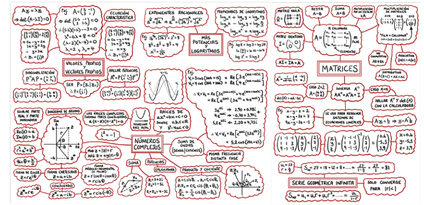
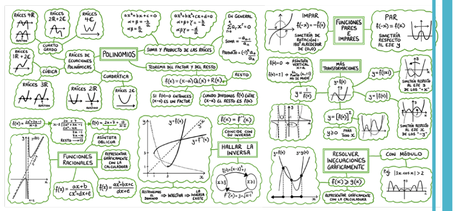
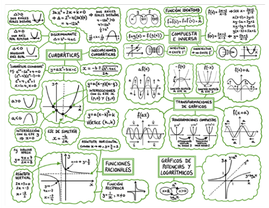
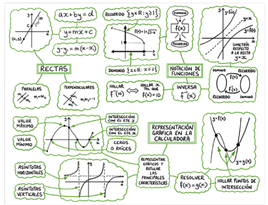
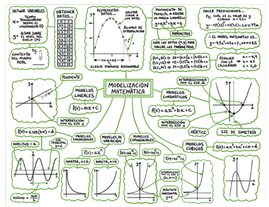
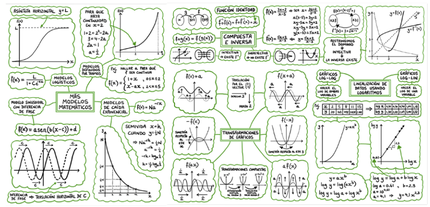
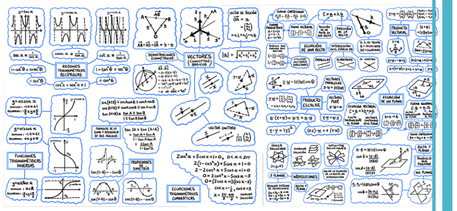
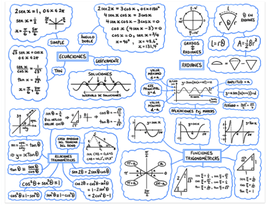
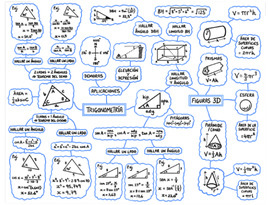
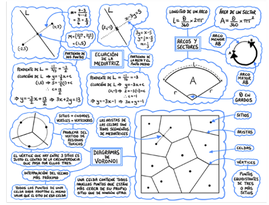
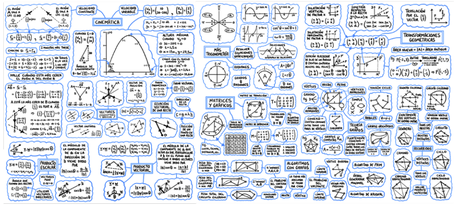
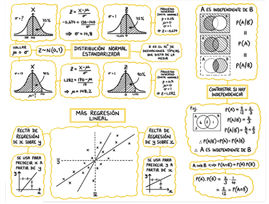
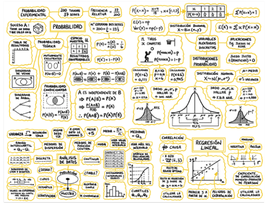
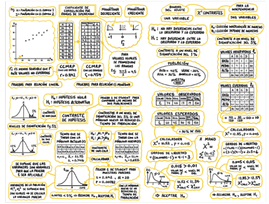
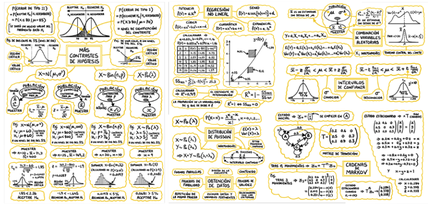
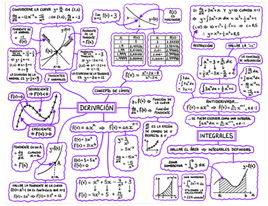
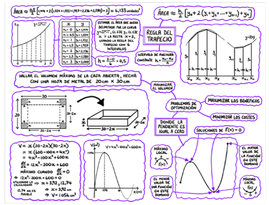
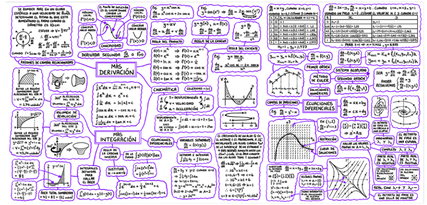
Mapa conceptual de Matemáticas
Índice interactivo

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

	Análisis y enfoques TANS	Análisis y enfoques NM	Contenido común	Aplicaciones e interpretación NM	Aplicaciones e interpretación TANS
Aritmética y álgebra					
Funciones					
Geometría y trigonometría					
Estadística y probabilidad					
Análisis					

Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

	Análisis y enfoques TANS	Análisis y enfoques NM	Contenido común	Aplicaciones e interpretación NM	Aplicaciones e interpretación TANS
Aritmética y álgebra					
Funciones					
Geometría y trigonometría					
Estadística y probabilidad					
Análisis					

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Aritmética y álgebra

REGLAS DE CONTEO

	n DE UN GRUPO n	r DE UN GRUPO n
COMB	1	${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
PERM	$n!$	${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

FORMAR UN COMITÉ

8 HOMBRES 5 MUJERES → 4 HOMBRES 3 MUJERES

${}^8C_4 \times {}^5C_3$

HOMBRES MUJERES

TODOS LOS ELEMENTOS JUNTOS

$H, H_2, \boxed{M, M_2, M_3}, H_3, H_4, H_5$

$6! \times 3!$

6 UNIDADES REORDENAR M

ELEMENTOS POR SEPARADO

$\_ H_1 \_ H_2 \_ H_3 \_ H_4 \_$

$M_1 \quad M_2 \quad M_3$

$\frac{5 \times 4 \times 3}{} \times 4!$

M EN HUECOS REORDENAR H

FRACCIONES PARCIALES

P. ej. $\frac{2x+13}{x^2+x-2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$

$\Rightarrow 2x+13 \equiv A(x+2) + B(x-1)$

SEA $x=-2 \Rightarrow 9 = -3B \Rightarrow B=-3$

SEA $x=1 \Rightarrow 15 = 3A \Rightarrow A=5$

$\therefore \frac{2x+13}{x^2+x-2} \equiv \frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+2}$

LINEAL / CUADRÁTICA $\Rightarrow \frac{A}{\text{LINEAL}} + \frac{B}{\text{LINEAL}}$

DOS FACTORES LINEALES EN EL DENOMINADOR

NÚMEROS COMPLEJOS

IGUALAR PARTE REAL Y PARTE IMAGINARIA

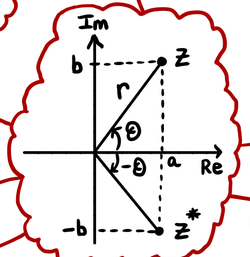
$\text{Re}(z) = a$

$\text{Im}(z) = b$

$r^2 = a^2 + b^2$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

DIAGRAMA DE ARGAND



FORMA DE EULER $z = re^{i\theta}$

FORMA CARTESIANA $z = a+ib$

FORMA MÓDULO-ARGUMENTAL (O POLAR) $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$

CONJUGADO

$z^* = re^{-i\theta}$

$z^* = a-ib$

$z^* = r\,\text{cis}(-\theta)$

RAÍCES COMPLEJAS EN PARES CONJUGADOS $(x-z)(x-z^*)$

RAÍCES DE $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ PARA $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$

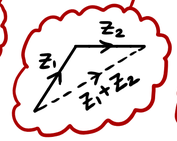
$i^2 = -1$

NÚMEROS COMPLEJOS

MOD $z = |z| = r$

ARG $z = \arg(z) = \theta$

SUMA



$z_1 = 3+2i$

$z_2 = 1-5i$

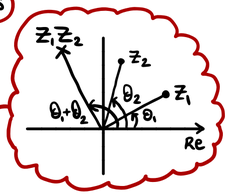
$z_1+z_2 = 4-3i$

PRODUCTO O COCIENTE

$z_1 = r_1\,\text{cis}\,\theta_1$, $z_2 = r_2\,\text{cis}\,\theta_2$

$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\text{cis}\,(\theta_1+\theta_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}\,(\theta_1-\theta_2)$



TEOREMA DE DE MOIVRE

$(r\,\text{cis}\,\theta)^n \equiv r^n\,\text{cis}\,n\theta$

DESARROLLAR $\left(z+\frac{1}{z}\right)^n \Rightarrow$ USAR PARA DEMOSTRAR RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

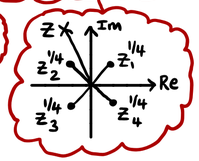
RAÍZ N-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO

P.ej. RAÍCES $4.^{as}$ DE $16\,\text{cis}\,100°$

$z^{1/4} = 16^{1/4}\,\text{cis}\left(\frac{100+360k}{4}\right)$

$= 2\,\text{cis}\,(25+90k)$

$= 2\,\text{cis}\,25°, 2\,\text{cis}\,115°, 2\,\text{cis}\,205°, 2\,\text{cis}\,295°$



TEOREMA DEL BINOMIO $n \in \mathbb{Q}$

$(1+3x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{(\frac{1}{2})(3x)}{2!} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(3x)^2}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(3x)^3}{} + \ldots = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + \ldots$

$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$

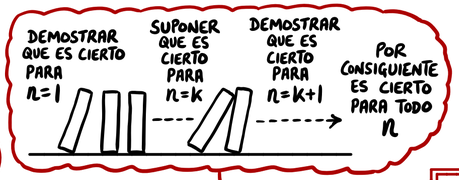
${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$

$(a+x)^n = \left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$

P. ej. $(3-x)^{-2} = 3^{-2}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{9}\left[1 + (-2)\left(\frac{-x}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{-x}{3}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{-x}{3}\right)^3 + \ldots\right]$

$= \frac{1}{9}\left[1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{4x^3}{27} + \ldots\right] = \frac{1}{9} + \frac{2x}{27} - \frac{x^2}{27} + \frac{4x^3}{243} + \ldots$

INDUCCIÓN MATEMÁTICA



DIVISIBILIDAD

P.ej. n^3+11n ES DIVISIBLE ENTRE 3

SERIE

P.ej. $\sum_{r=1}^{n} r(r!) = (n+1)! - 1$

ANÁLISIS

P.ej. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

NÚMEROS COMPLEJOS

P.ej. $(\cos x + i\,\text{sen}\,x)^n = \cos(nx) + i\,\text{sen}(nx)$

DEMOSTRACIÓN

$n^2+41n+41$ ES UN N.° PRIMO PARA TODO $n \in \mathbb{Z}^+$

$n=41 \Rightarrow n^2+41n+41 = 3403$

$3403 = 41 \times 83$ ∴ FALSO

CONTRA-EJEMPLOS

POR CONTRADICCIÓN

SUPONER QUE A ES FALSO $\Rightarrow$ ERROR $\Rightarrow$ POR TANTO, A ES VERDADERO

P.ej. MOSTRAR QUE $\sqrt{3}$ ES IRRACIONAL

DEMOSTRAR QUE HAY INFINITOS NÚMEROS PRIMOS

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$x+3y-z=15$

$2x+y+z=7$

$x-y-2z=0$

RESOLVER USANDO

ÁLGEBRA

CALCULADORA

MATRICES

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

NINGUNA SOLUCIÓN — INCOMPATIBLE

ÚNICA SOLUCIÓN

INFINITAS SOLUCIONES — HALLAR SOLUCIÓN GENERAL

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Funciones

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

POLINOMIOS

- RAÍCES DE ECUACIONES POLINÓMICAS
  - CUARTO GRADO
    - RAÍCES 4ℝ (REPETIDO)
    - RAÍCES 2ℝ+2ℂ
    - RAÍCES 4ℂ
  - CÚBICA
    - RAÍCES 1ℝ + 2ℂ
    - RAÍCES 3ℝ (REPETIDO)
  - CUADRÁTICA
    - RAÍCES 2ℝ (REPETIDO)
    - RAÍCES 2ℂ
- SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAÍCES
  - $ax^2+bx+c=0$: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
  - $ax^3+bx^2+cx+d=0$: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$
  - EN GENERAL $\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = 0$
    - SUMA $= \frac{-a_{n-1}}{a_n}$
    - PRODUCTO $= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$
- TEOREMA DEL FACTOR Y DEL RESTO
  - $f(x)=(x-a)Q(x)+R(x)$ — RESTO
  - SI $f(a)=0$ ENTONCES $(x-a)$ ES UN FACTOR
  - CUANDO DIVIDIMOS $f(x)$ ENTRE $(x-a)$ EL RESTO ES $f(a)$

FUNCIONES RACIONALES

- $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x-2}$
- $x-2 \overline{)\,2x^2+3x-1}$ → $2x$ | $2x^2-4x$ | $7x-1$ | $7x-14$ | RESTO → 13
- $f(x)=2x+7+\frac{13}{x-2}$
- ASÍNTOTA OBLICUA
- REPRESENTAR GRÁFICAMENTE CON LA CALCULADORA
- $f(x)=\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$
- $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

FUNCIONES PARES E IMPARES

- IMPAR: $f(-x)=-f(x)$; SIMETRÍA DE ROTACIÓN: 180° ALREDEDOR DE (0,0)
- PAR: $f(-x)=f(x)$; SIMETRÍA RESPECTO AL EJE y

MÁS TRANSFORMACIONES

- $f(a)=0 \Rightarrow$ ASÍNTOTA VERTICAL $x=a$
- $f(a)=\pm 1 \Rightarrow$ EL PUNTO $(a,\pm 1)$ NO SE MUEVE
- $y=\frac{1}{f(x)}$
- $y=f(x)$
- $y=f(|x|)$ — SIMETRÍA RESPECTO AL EJE y DE LOS "+x"
- $y=|f(x)|$ — SIMETRÍA RESPECTO AL EJE x DE LOS "−y"
- $y=[f(x)]^2$
- $y \geqslant 0$ PARA TODO x

HALLAR LA INVERSA

- $f(x)=f^{-1}(x)$
- COINCIDE CON SU INVERSA
- RESTRINGIMOS EL DOMINIO $\Rightarrow$ INYECTIVA $\Rightarrow$ LA INVERSA EXISTE
- $f(x)=(x-3)^2+1$, $x\geqslant 3$; $f^{-1}(x)=3+\sqrt{x-1}$, $x\geqslant 1$

RESOLVER INECUACIONES GRÁFICAMENTE

- $f(x) \geqslant g(x)$
- REPRESENTAR GRÁFICAMENTE CON LA CALCULADORA
- CON MÓDULO — P.ej. $|3x.\cos x| > 2$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Geometría y trigonometría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

$y = \sec x$ — $\sec x \equiv \frac{1}{\cos x}$

$y = \operatorname{cosec} x$ — $\operatorname{cosec} x \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$y = \cot x$ — $\cot x \equiv \frac{1}{\tan x}$

$1 + \cot^2\theta \equiv \operatorname{cosec}^2\theta$ $\div \operatorname{sen}^2\theta$

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \equiv 1$

$1 + \tan^2\theta \equiv \sec^2\theta$ $\div \cos^2\theta$

VECTORES (CONCEPTOS BÁSICOS)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \underline{b} - \underline{a}$

VECTOR DE POSICIÓN

$\overrightarrow{OA} = \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$

$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (\underline{a} - \underline{b})(\underline{c} - \underline{b})$
$= (\underline{a} - \underline{b})(-\underline{a} - \underline{b})$
$= -\underline{a}.\underline{a} - \underline{a}.\underline{b} + \underline{b}.\underline{a} + \underline{b}.\underline{b}$
$= -|\underline{a}|^2 - \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{b} + |\underline{b}|^2$
$= -r^2 + r^2$
$= 0 \Rightarrow \hat{ABC} = 90°$

VECTOR UNITARIO

$\frac{1}{|\underline{v}|}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

FORMA CARTESIANA

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+1}{4}$ $(=\lambda)$

FORMA PARAMÉTRICA

$x = 3 + 2\lambda$
$y = 5 - \lambda$
$z = -1 + 4\lambda$

FORMA VECTORIAL

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\underline{r} = \underline{a} + \lambda\underline{b}$

POSICIÓN DE UN PUNTO EN UNA RECTA

DIRECCIÓN DE LA RECTA

SI λ ES TIEMPO
$\underline{b}$ = VELOCIDAD
$|\underline{b}|$ = CELERIDAD

ECUACIÓN DE UNA RECTA

ANGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

UTILIZAR VECTORES DIRECTORES

INTERSECCIÓN EN EL ESPACIO 3D

PARALELAS

ALABEADAS

SE CORTAN

PRODUCTO VECTORIAL

$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$

$|\underline{v} \times \underline{w}| = |\underline{v}||\underline{w}|\operatorname{sen}\theta$

ÁREA $= \frac{1}{2}|\underline{v} \times \underline{w}|$

$\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$

$(k\underline{v}) \times \underline{w} = k(\underline{v} \times \underline{w})$

$\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}$

$\underline{v} \times \underline{v} = 0$

PRODUCTO ESCALAR

$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}| \cos\theta$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

VECTORES PARALELOS $\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}|$

VECTORES PERP. $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

$\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$

$\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$

$(k\underline{v}) \cdot \underline{w} = k(\underline{v} \cdot \underline{w})$

ECUACIÓN DE UN PLANO

ECUACIÓN VECTORIAL $\underline{r} = \underline{a} + \lambda\underline{b} + \mu\underline{c}$

PUNTO PERTENECIENTE AL PLANO

VECTORES CONTENIDOS EN EL PLANO

$\underline{b} \times \underline{c} \rightarrow \underline{n}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

FORMA NORMAL $\underline{r} \cdot \underline{n} = \underline{a} \cdot \underline{n}$

VECTOR PERPENDICULAR AL PLANO

PUNTO PERTENECIENTE AL PLANO

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

FORMA CARTESIANA $8x + 12y + z = 35$

INTERSECCIONES

ÚNICA SOLUCIÓN (x, y, z)

NINGUNA SOLUCIÓN

INFINITAS SOLUCIONES

HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA DE INTERSECCIÓN

3 PLANOS

RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

$2x + 3y - z = 10$
$3x - y + 5z = -4$
$x - 2y - 3z = 8$

RECTA Y PLANO

$3x + 5y - z = 20$ Y RESOLVER $x = 1 - 2\lambda$, $y = 2 + \lambda$, $z = 3 + 4\lambda$

$\underline{n} \cdot \underline{d} = |\underline{n}||\underline{d}| \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{d}|}{|\underline{n}||\underline{d}|}$

$\operatorname{sen}\emptyset = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{d}|}{|\underline{n}||\underline{d}|}$

RECTA Y PLANO

ÁNGULO QUE FORMAN

DOS PLANOS

$\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = |\underline{n}_1||\underline{n}_2| \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{|\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2|}{|\underline{n}_1||\underline{n}_2|}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS CUADRÁTICAS

$2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos x + 1 = 0, \quad 0 < x < 2\pi$
$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 1 = 0$
$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0$
$0 = 2\cos^2 x - 5\cos x - 3$
$0 = (2\cos x + 1)(\cos x - 3)$
$\cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = 3$
$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, NINGUNA SOLUCIÓN

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$y = \arcsen x$
DOMINIO: $-1 \leq x \leq 1$
RECORRIDO: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \arccos x$
DOMINIO: $-1 \leq x \leq 1$
RECORRIDO: $0 \leq y \leq \pi$

$y = \arctan x$
DOMINIO: $x \in \mathbb{R}$
RECORRIDO: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

FORMULAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

$\operatorname{sen}(A \pm B) \equiv \operatorname{sen}A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen}B$
$\cos(A \pm B) \equiv \cos A\cos B \mp \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$
$\tan(A \pm B) \equiv \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

$\tan 2A \equiv \tan(A + A) \equiv \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A\tan A} \equiv \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

PROPIEDADES DE SIMETRÍA

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

TEOREMA DE BAYES

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

TRES SUCESOS

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$

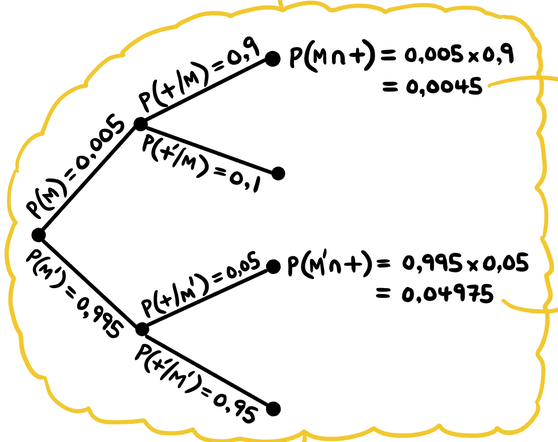
DOS SUCESOS

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(A)}$$

⇒ EL 0,5% DE LA POBLACIÓN TIENEN UNA DETERMINADA ENFERMEDAD.

⇒ LA PRUEBA TIENE UN...
- 5% DE PROBABILIDADES DE DAR UN FALSO POSITIVO
- 10% DE PROBABILIDADES DE DAR UN FALSO NEGATIVO

⇒ SI DOY POSITIVO, ¿QUÉ PROBABILIDAD HAY DE QUE TENGA REALMENTE LA ENFERMEDAD?



$$P(+) = 0{,}0045 + 0{,}04975 = 0{,}05425$$

$$P(M/+) = \frac{P(+/M)\cdot P(M)}{P(+)} = \frac{0{,}9\times 0{,}005}{0{,}05425} = 0{,}083$$

SOLO UN 8,3% DE POSIBILIDADES DE TENER LA ENFERMEDAD SI DOY + EN LA PRUEBA

VARIABLES ALEATORIAS

CONTINUA

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

MODA = ALLÍ DONDE $f(x)$ ALCANZA SU MÁX.

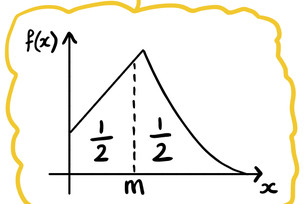
$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

EL ÁREA TOTAL DEBAJO DE LA CURVA ES IGUAL A UNO

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

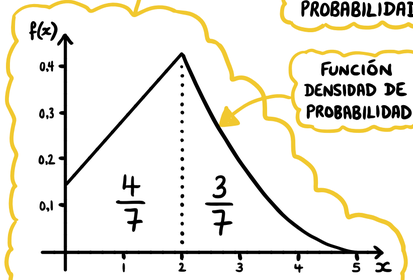
MEDIANA = m

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$



DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD



$$\int_0^2 \tfrac{1}{7}(x+1)\,dx + \int_2^5 \tfrac{1}{21}(x-5)^2\,dx = \tfrac{4}{7} + \tfrac{3}{7} = 1$$

⇒ f ES UNA F.D.P.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}(x+1), & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{21}(x-5)^2, & 2 < x \le 5 \\ 0, & \text{RESTO DE VALORES} \end{cases}$$

MODA = 2

$$\mu = E(X) = \int_0^2 x\cdot\tfrac{1}{7}(x+1)\,dx + \int_2^5 x\cdot\tfrac{1}{21}(x-5)^2\,dx = 0{,}667 + 1{,}179 = 1{,}845$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\cdot\tfrac{1}{7}(x+1)\,dx + \int_2^5 x^2\cdot\tfrac{1}{21}(x-5)^2\,dx = 0{,}952 + 3{,}386 = 4{,}338$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 4{,}338 - 1{,}845^2 = 0{,}933$$

SI LA MEDIANA = m, EN ESE CASO

$$\int_0^m \tfrac{1}{7}(x+1) = \tfrac{1}{2}$$

RESOLVIÉNDOLA CON CALCULADORA

⇒ m = 1,828

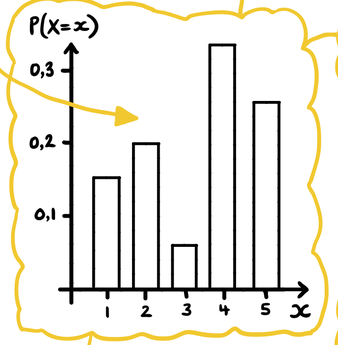
DISCRETA

MODA = EL VALOR MÁS PROBABLE DE x

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x^2 P(X=x) - \mu^2$$

$$\sum P(X=x) = 1$$

$$\mu = E(X) = \sum x\,P(X=x)$$



x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,15	0,2	0,05	0,35	0,25

$$\mu = E(X) = (1\times 0{,}15) + (2\times 0{,}2) + \ldots + (5\times 0{,}25) = 3{,}35$$

$$E(X^2) = (1^2\times 0{,}15) + (2^2\times 0{,}2) + \ldots + (5^2\times 0{,}25) = 13{,}25$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 13{,}25 - 3{,}35^2 = 2{,}028$$

TRANSFORMACIÓN LINEAL DE $X \Rightarrow aX+b$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

P.ej. $E(X) = 100$, $\mathrm{Var}(X) = 20$ y $Y = 3X+5$

$\Rightarrow E(Y) = 3\times 100 + 5 = 305$, $\mathrm{Var}(Y) = 3^2\times 20 = 180$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ECUACIONES DIFERENCIALES

Pej. $\frac{dy}{dx} = xy - x = x(y-1)$

$\therefore \int \frac{1}{y-1}\,dy = \int x\,dx$

$\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + c$

$y-1 = e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot e^c$

$y-1 = Ae^{\frac{1}{2}x^2}$

$y = Ae^{\frac{1}{2}x^2}+1$

SEPARAR E INTEGRAR $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$

VARIABLES SEPARABLES $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

Pej. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x} = 1+2\left(\frac{y}{x}\right)$

SEA $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$\therefore x\frac{dv}{dx} + v = 1 + 2\left(\frac{vx}{x}\right)$

$x\frac{dv}{dx} = 1 + v$

$\int \frac{1}{1+v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln|1+v| = \ln|x| + c$

$1 + \frac{y}{x} = Ax$

$y = Ax^2 - x$

SUSTITUIR $y = vx$

FORMA HOMOGÉNA $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Pej. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

$\therefore I(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$

$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = e^{3x}$

$\frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{2x}\right) = e^{3x}$

$ye^{2x} = \int e^{3x}\,dx$

$ye^{2x} = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

$y = \frac{e^x}{3} + \frac{c}{e^{2x}}$

IR MULTIPLICANDO POR.. $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

FACTOR INTEGRANTE $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN DE LA FORMA...

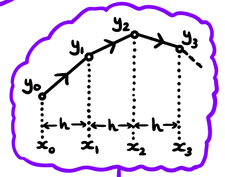
Pej. $\frac{dy}{dx} = x + y$

$x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ h = 0{,}2$

n	x_n	y_n
0	0	= 1
1	0,2	= 1 + 0,2 (0+1) = 1,2
2	0,4	= 1,2 + 0,2 (0,2+1,2) = 1,48
3	0,6	= 1,48 + 0,2 (0,4+1,48) = 1,856
4	0,8	= 1,856 + 0,2 (0,6+1,856) = 2,3472
5	1	= 2,3472 + 0,2 (0,8+2,3472) = 2,9766

$x_5 = 1$, $y_5 = 2{,}9766$

MÉTODO DE EULER CON PASO CONSTANTE h



$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$x_{n+1} = x_n + h$

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

SERIE DE MACLAURIN

$f(0) = \cos(0) = 1$
$f'(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$
$f''(0) = -\cos(0) = -1$
$f'''(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$
$f''''(0) = \cos(0) = 1$
etc...

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$x \to x^2 \Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$

A PARTIR DE UNA ECUACIÓN DIFERENTIAL

$y' = x^2 + y^2$, $x=0, y=1$

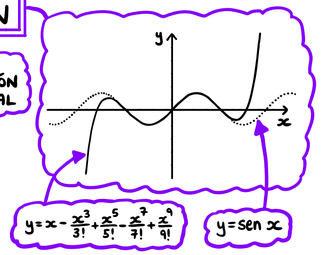
DERIVAR IMPLÍCITAMENTE

$\Rightarrow y'' = 2x + 2yy'$

$\Rightarrow y''' = 2 + 2yy'' + 2y'y'$

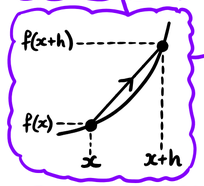
$y(0) = 1$
$y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$
$y''(0) = 2.0 + 2.1.1 = 2$
$y'''(0) = 2 + 2.1.2 + 2.1.1 = 8$

$y = 1 + 1.x + \frac{2.x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \ldots$

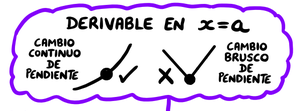


LÍMITES

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$



DERIVABLE EN $x=a$



CONTINUA EN $x=a$ SI $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$



REGLA DE L'HÔPITAL

UNA VEZ

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{3x^2-2x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x}{6x-2} = \frac{5}{4}$

"$\frac{0}{0}$" OR "$\frac{\infty}{\infty}$"

DOS VECES

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

$\int \text{DIFÍCIL}\ dx \xrightarrow[u=f(x)]{\text{SEA}} \int \text{FÁCIL}\ du$

$\int x(2x+3)^5\,dx$

SEA $u = 2x+3$

$\frac{du}{dx} = 2, dx = \frac{1}{2}du$

$x = \frac{1}{2}(u-3)$

$= \int \frac{1}{2}(u-3)u^5\frac{1}{2}\,du$

$= \int \frac{1}{4}u^6 - \frac{3}{4}u^5\,du$

$= \frac{1}{28}u^7 - \frac{1}{8}u^6 + c$

$= \frac{(2x+3)^7}{28} - \frac{(2x+3)^6}{8} + c$

SUSTITUCIONES TRIG.

SI VE...	EN ESE CASO USE...
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\Rightarrow x = a\sin\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\Rightarrow x = a\sec\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\Rightarrow x = a\tan\theta$

CAMBIAR LOS LÍMITES

$\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$

$[u = e^x, \frac{du}{dx} = e^x, du = e^x dx$

CUANDO $x=0 \Rightarrow u=1$

$x = \ln 3 \Rightarrow u = 3]$

$= \int_1^3 \frac{1}{u^2+9}\,du$

$= \left[\frac{1}{3}\arctan\frac{u}{3}\right]_1^3$

$= \frac{1}{3}\arctan 1 - \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}$

$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}$

INTEGRACIÓN POR PARTES

$\int u\frac{dv}{dx} = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$

MULTIPLICAR POR 1

$\int \ln x\,dx$
$= \int \ln x \cdot 1\,dx$
$= \ln x . x - \int x\frac{1}{x}\,dx$
$= x\ln x - x + c$

EN BUCLE

POR PARTES UNA VEZ

$\int xe^x\,dx$
$= xe^x - \int e^x . 1\,dx$
$= xe^x - e^x + c$

POR PARTES DOS VECES

$I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$
$= e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\,dx$
$= -e^x\cos x + \left[e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx\right]$
$= -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - I$
$\therefore 2I = e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x$
$I = \frac{1}{2}(e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x) + c$

$\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$
$= x^2(-\cos x) + \int 2x\cos x\,dx$
$= -x^2\cos x + \left[2x\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\,dx\right]$
$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c$

MÁS INTEGRALES

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + c$
$\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsen x + c$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

MÁS DERIVADAS

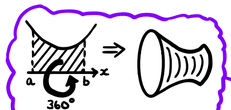
$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x\tan x$
$f(x) = \operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x\cot x$
$f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$f(x) = a^x$
$f'(x) = a^x \ln a$

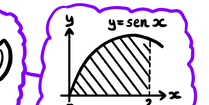
$f(x) = \log_a x$
$f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$

$f(x) = \arcsen x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$ $\quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

VOLUMEN DE REVOLUCIÓN

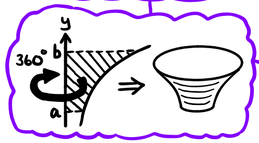


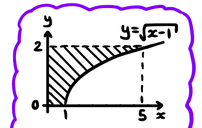
360° ALREDEDOR DEL EJE X
VOLUMEN $= \int_a^b \pi y^2\,dx$



ROTAR LA REGIÓN SOMBREADA 360° ALREDEDOR DEL EJE X
$\therefore V = \pi\int_0^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx$
$= 3{,}74$ unidades^3

360° ALREDEDOR DEL EJE Y
VOLUMEN $= \int_a^b \pi y^2\,dx$





ROTAR LA REGIÓN SOMBREADA 360° ALREDEDOR DEL EJE Y
$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 + 1 = x$
$\therefore V = \int_0^2 \pi(y^2+1)^2\,dy$
$= 43{,}14$ unidades^3

INTEGRALES CON FRACCIONES PARCIALES

$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx$
$= \ln|x+1| - \ln|x+2| = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$

FRACCIONES PARCIALES

$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$
$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

REGLA DE LA CADENA

$y^5 \to 5y^4\frac{dy}{dx}$

HALLAR LA PENDIENTE EN (a,b) $\Rightarrow$ 1.° SUST. VALORES

REGLA DEL PRODUCTO

$x^3y^2 \to x^3.2y\frac{dy}{dx} + 3x^2y^2$

$e^{2x+y} + 2xy^3 = 7$

$e^{2x+y}\left(2+\frac{dy}{dx}\right) + 2x.3y^2\frac{dy}{dx} + 2y^3 = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y^3 - e^{2x+y}}{e^{2x+y} + 6xy^2}$

RAZONES RELACIONADAS

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

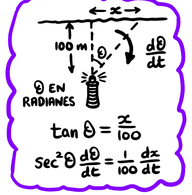
$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2r\frac{dr}{dt}h\right)$



$x^2 + y^2 = 100$

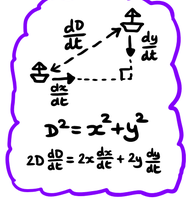
$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$





$\tan\theta = \frac{x}{100}$

$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\frac{dx}{dt}$



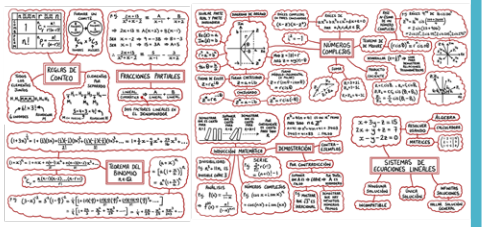
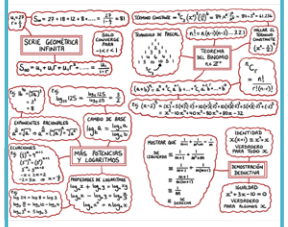
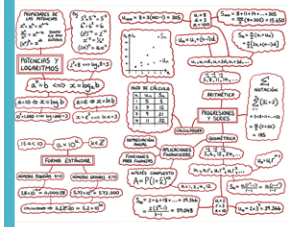
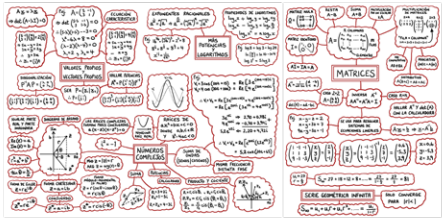
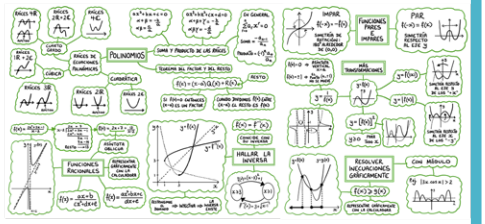
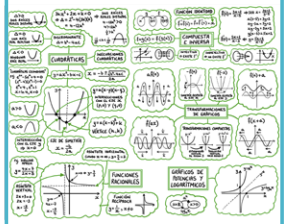
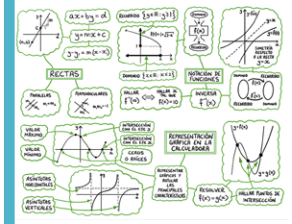
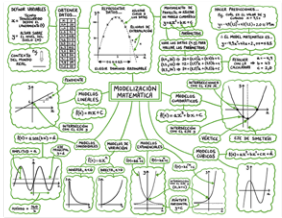
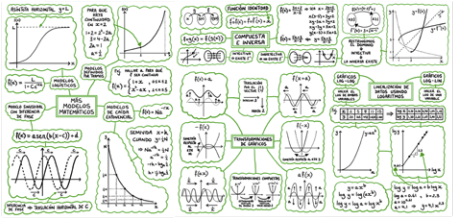
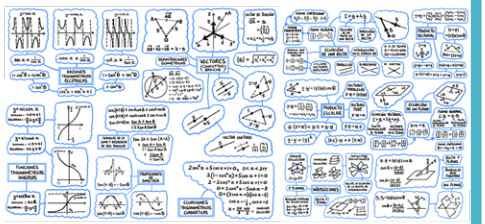
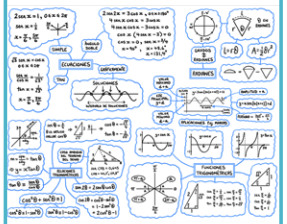
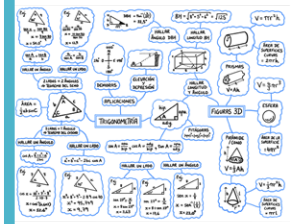
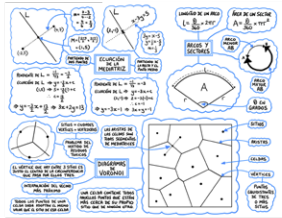
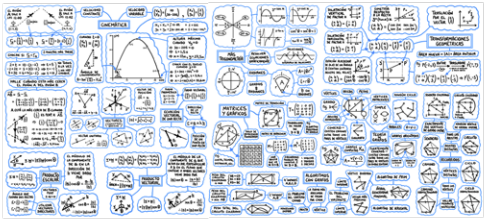
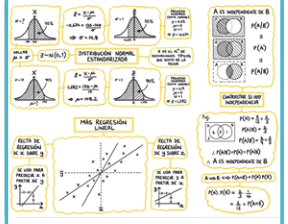
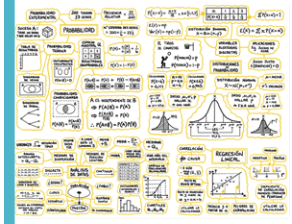
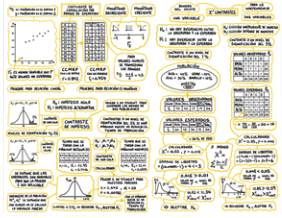
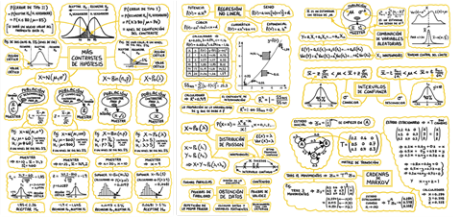
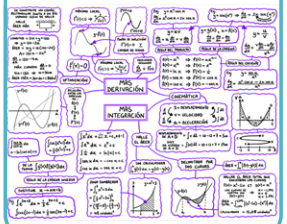
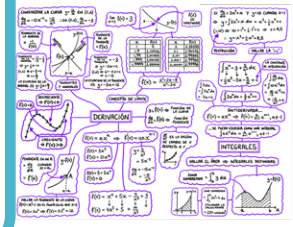
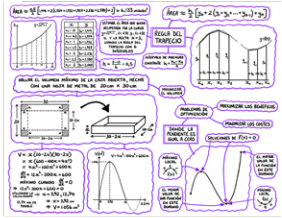
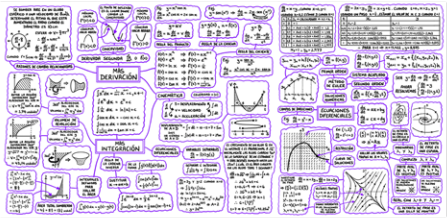
$D^2 = x^2 + y^2$

$2D\frac{dD}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

	Análisis y enfoques TANS	Análisis y enfoques NM	Contenido común	Aplicaciones e interpretación NM	Aplicaciones e interpretación TANS
Aritmética y álgebra					
Funciones					
Geometría y trigonometría					
Estadística y probabilidad					
Análisis					

Aritmética y álgebra

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

SERIE GEOMÉTRICA INFINITA

$u_1 = 27$, $r = \frac{2}{3}$

$S_\infty = 27 + 18 + 12 + 8 + \ldots = \frac{27}{1 - \frac{2}{3}} = 81$

SOLO CONVERGE PARA $-1 < r < 1$

$S_\infty = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \ldots = \frac{u_1}{1 - r}$

TEOREMA DEL BINOMIO $n \in \mathbb{Z}^+$

TÉRMINO CONSTANTE $= {}^9C_3 \left(x^2\right)^3 \left(\frac{-3}{x}\right)^6 = 84 \cancel{x^6} \cdot \frac{3^6}{\cancel{x^6}} = 84 \times 3^6 = 61.236$

TRIANGULO DE PASCAL

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

${}^5C_3$

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$

HALLAR EL TÉRMINO CONSTANTE $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$

$(a+b)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + b^n$

${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

P.ej. $(x-2)^5 = (x)^5 + 5(x)^4(-2)^1 + 10(x)^3(-2)^2 + 10(x)^2(-2)^3 + 5(x)^1(-2)^4 + (-2)^5$
$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

MÁS POTENCIAS Y LOGARITMOS

P.ej. $16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

EXPONENTES RACIONALES

$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \Rightarrow a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

P.ej. $\log_{25} 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 25} = \frac{3}{2}$

CAMBIO DE BASE

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

ECUACIONES

P.ej. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{x+1}$

$\left(3^{-1}\right)^x = \left(3^2\right)^{x+1}$

$3^{-x} = 3^{2x+2}$

$-x = 2x + 2$

$-2 = 3x \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$\log_a x^n = n \log_a x$

P.ej.

$\log 24 = \log 8 + \log 3$

$\log_3 \frac{10}{4} = \log_3 10 - \log_3 4$

$\log_4 3^5 = 5 \log_4 3$

MOSTRAR QUE $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m^2+m} = \frac{1}{m}$

DE IZQUIERDA $\equiv \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m^2+m}$

$\equiv \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}$

$\equiv \frac{m+1}{m(m+1)}$

$\equiv \frac{1}{m}$

$\equiv$ DE DERECHA

DEMOSTRACIÓN DEDUCTIVA

IDENTIDAD

$x(x+1) \equiv x^2 + x$

VERDADERO PARA TODO x

IGUALDAD

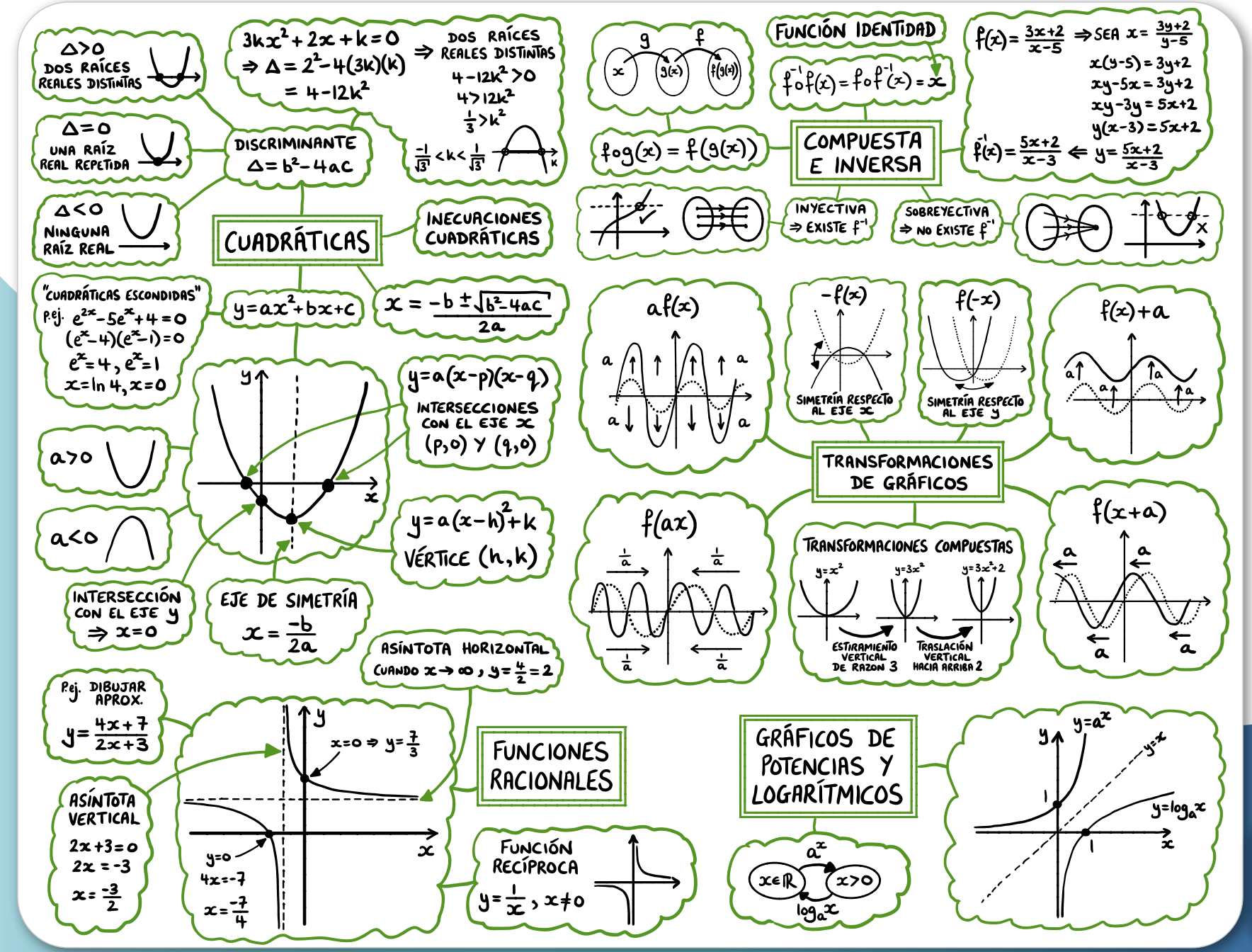
$x^2 + 3x - 10 = 0$

VERDADERO PARA ALGUNOS x

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Funciones

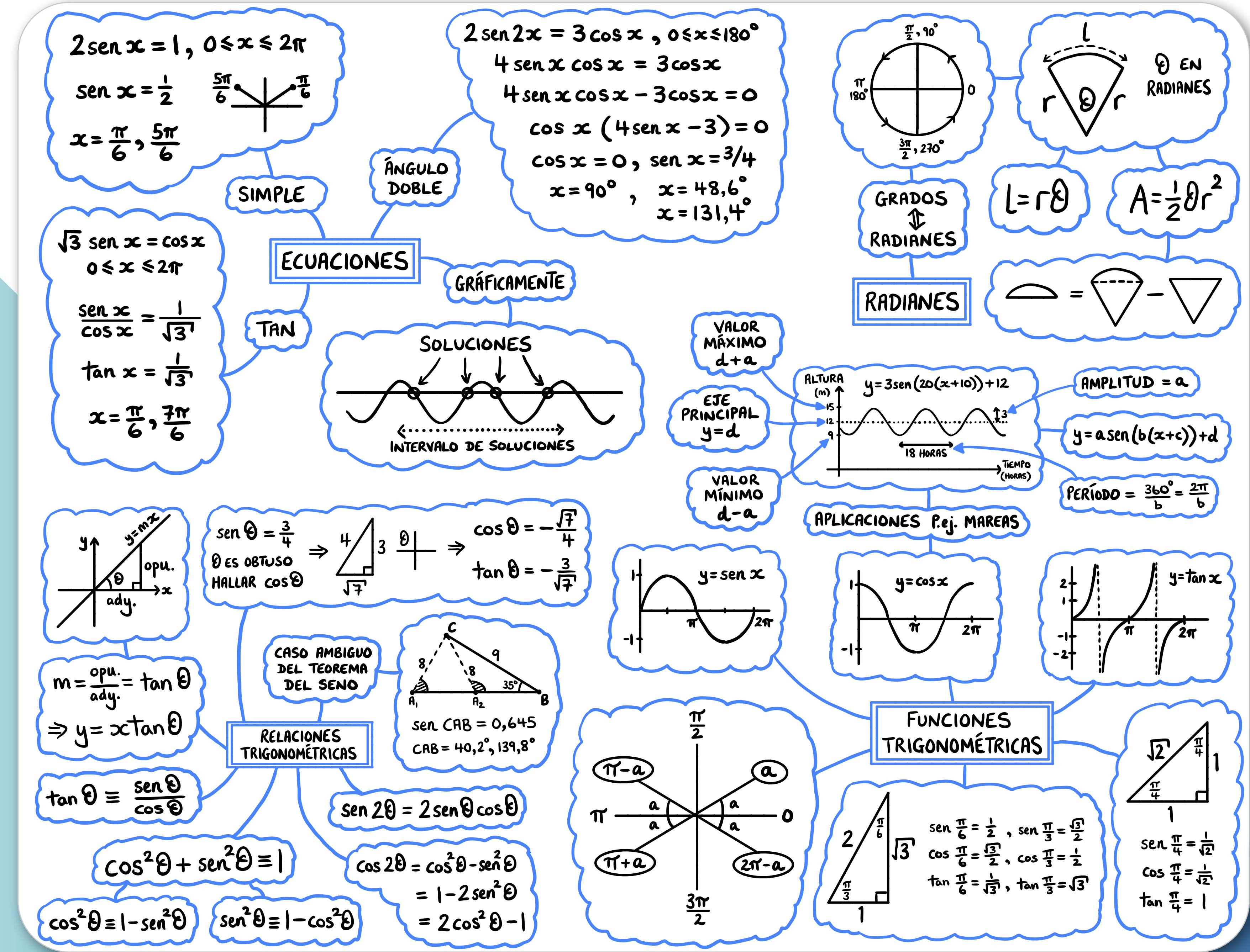
International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Geometría y trigonometría

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Estadística y probabilidad

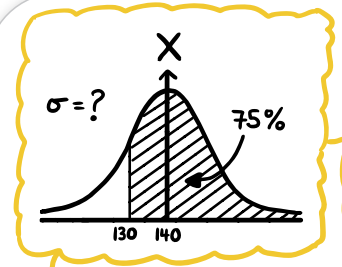
International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDARIZADA

HALLAR μ o σ

$Z \sim N(0,1)$

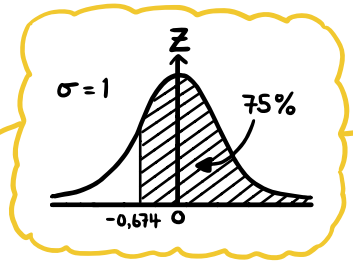
Z ES EL N.º DE DESVIACIONES TÍPICAS QUE DISTA DE LA MEDIA



$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$-0{,}674 = \frac{130-140}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma = 14{,}8$$



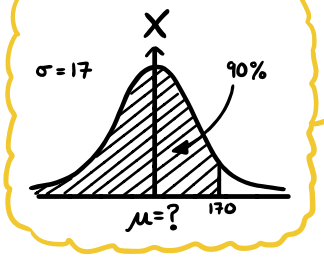
PROCESO INVERSO (DISTR. NORMAL)

$p = 0{,}25$

$\mu = 0$

$\sigma = 1$

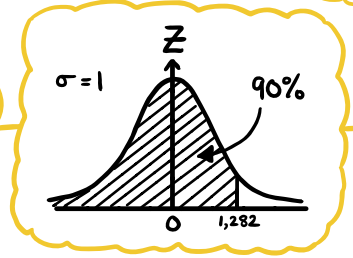
$\Rightarrow z = -0{,}674$



$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$1{,}282 = \frac{170-\mu}{17}$$

$$\Rightarrow \mu = 148{,}2$$



PROCESO INVERSO (DISTR. NORMAL)

$p = 0{,}9$

$\mu = 0$

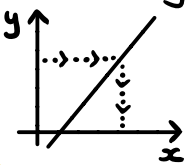
$\sigma = 1$

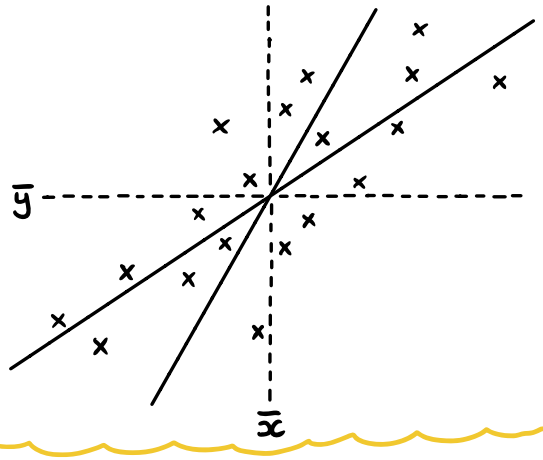
$\Rightarrow z = 1{,}282$

MÁS REGRESIÓN LINEAL

RECTA DE REGRESIÓN DE x SOBRE y

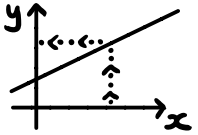
SE USA PARA PREDECIR x A PARTIR DE y



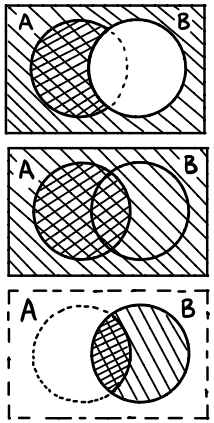


RECTA DE REGRESIÓN DE y SOBRE x

SE USA PARA PREDECIR y A PARTIR DE x



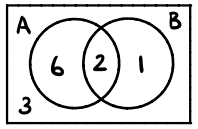
A ES INDEPENDIENTE DE B



$P(A/B') = P(A) = P(A/B)$

CONTRASTAR SI HAY INDEPENDENCIA

P.ej.



$P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$P(A/B) = \frac{2}{3}$

$P(A/B') = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\therefore P(A/B') = P(A) = P(A/B)$

$\therefore$ A ES INDEPENDIENTE DE B

A IND. B $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$P(A).P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{2}{12} = P(A \cap B)$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

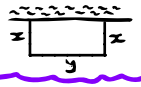
Análisis

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MÁS DERIVACIÓN

SE CONSTRUYE UN CAMPO RECTANGULAR JUNTO A UN RÍO USANDO 120m DE VALLA

HALLE ÁREA MÁX.



LONGITUD $= 2x + y = 120$

$\Rightarrow y = 120 - 2x$

ÁREA $= xy = x(120-2x)$

$A = 120x - 2x^2$

$\frac{dA}{dx} = 120 - 4x$

MÁX. CUANDO $\frac{dA}{dx} = 0$

$4x = 120 \Rightarrow x = 30m$

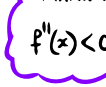
$\therefore$ ÁREA MÁX. $= 30 \times 60 = 1.800 m^2$

OPTIMIZACIÓN

$f'(x) = 0$

MÁXIMO LOCAL

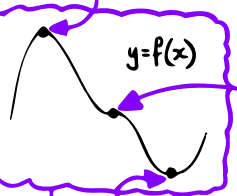
$f''(x) < 0 \Rightarrow$

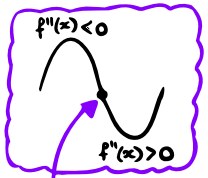


MÍNIMO LOCAL

$f''(x) > 0 \Rightarrow$





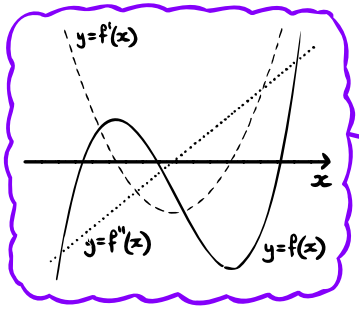


PUNTOS DE INFLEXIÓN

$f''(x) = 0$ Y CAMBIA DE SIGNO

DERIVADA SEGUNDA

$\frac{d^2y}{dx^2}$ o $f''(x)$



RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE...

$f(x)$ ↕ $f'(x)$ ↕ $f''(x)$

P.ej. $y = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$

$\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x$

REGLA DEL PRODUCTO

$y = uv$

$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

P.ej. $y = \operatorname{sen}(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$ (DERIVACIÓN)

REGLA DE LA CADENA

$y = g(u),\ u = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

REGLA DEL COCIENTE

$y = \frac{u}{v}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

P.ej. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \cos x - 2x \cdot \operatorname{sen} x}{x^4}$

$f(x) = x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

MÁS INTEGRACIÓN

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$

$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$

$\int 2x(x^2+1)^4 dx = \frac{1}{5}(x^2+1)^5 + c$

DE LA FORMA $\int g'(x) f(g(x)) dx$

REGLA DE LA CADENA INVERSA

SUSTITUIR $x \rightarrow ax+b$

P.ej. $\int e^{3x+2} dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + c$

$\int \cos(2x-1) dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x-1) + c$

HALLE EL ÁREA

SIN CALCULADORA

$\int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a)$

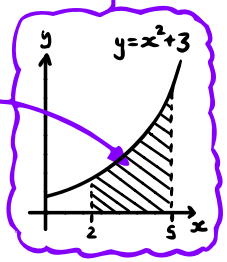
ZONA SOMBREADA

$= \int_2^5 x^2 + 3\, dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_2^5$

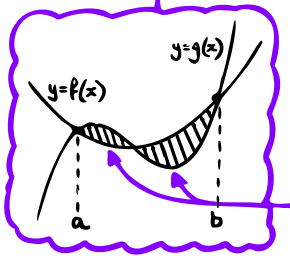
$= \left(\frac{125}{3} + 15\right) - \left(\frac{8}{3} + 6\right)$

$= 48$ unidades^2



DELIMITADA POR DOS CURVAS

$\text{ÁREA} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$



HALLAR EL ÁREA TOTAL QUE ENCIERRAN LAS CURVAS

$f(x) = x^3 - 5x$ ET $g(x) = x^2$

LAS CURVAS SE CORTAN EN $f(x) = g(x) \Rightarrow$ $x = -1{,}791$, $x = 0$, $x = 2{,}791$

ÁREA TOTAL $= \int_{-1{,}791}^{2{,}791} |(x^3 - 5x) - (x^2)|\, dx$

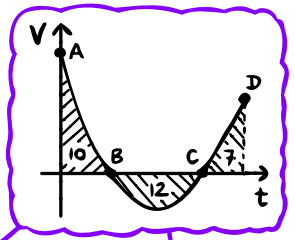
CALCULADORA $= 15{,}08$ unidades^2

CINEMÁTICA

$\frac{d}{dt}$ ↷ s = DESPLAZAMIENTO ↶ $\int dt$

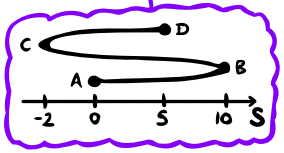
$\frac{d}{dt}$ ↷ v = VELOCIDAD ↶ $\int dt$

a = ACELERACIÓN



DESPLAZAMIENTO DE A A D $= \int v\, dt = 10 - 12 + 7 = 5m$

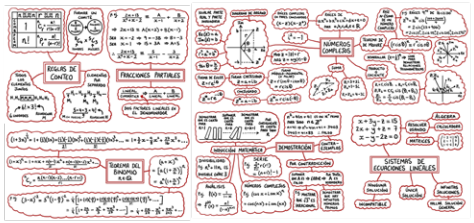
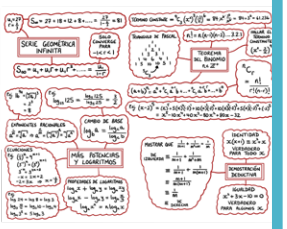
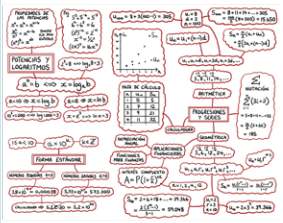
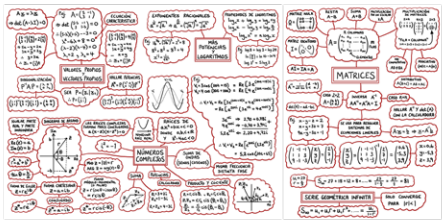
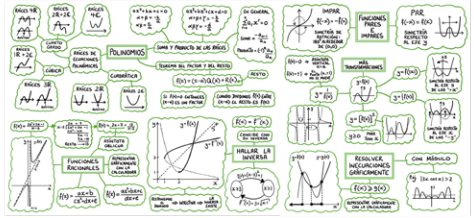
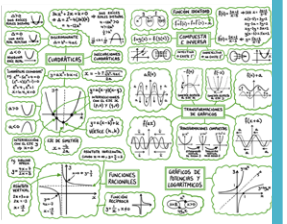
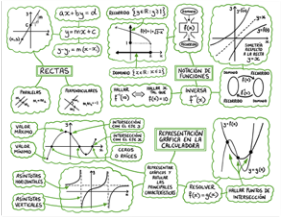
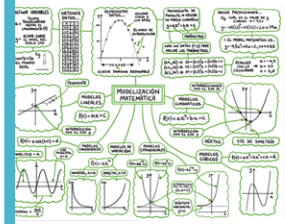
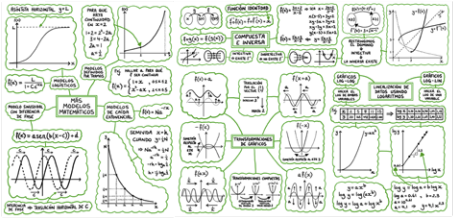
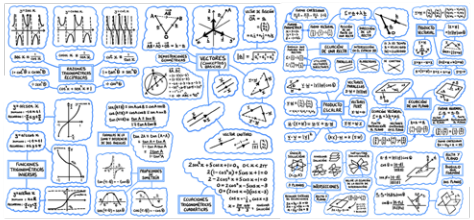
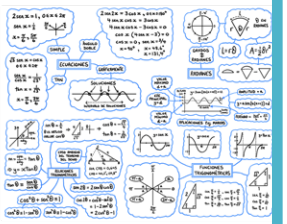
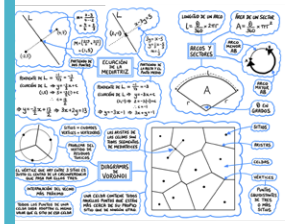
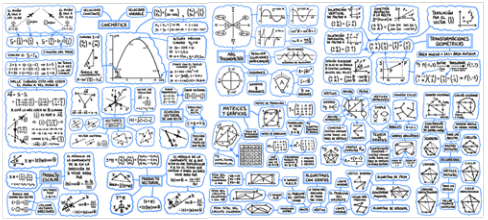
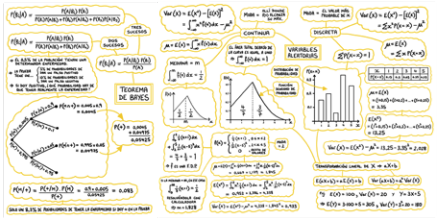
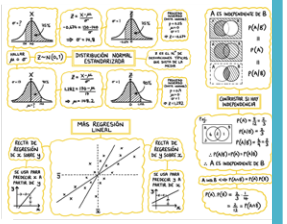
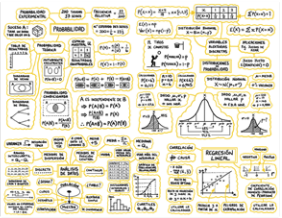
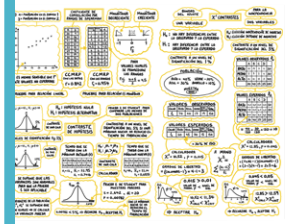
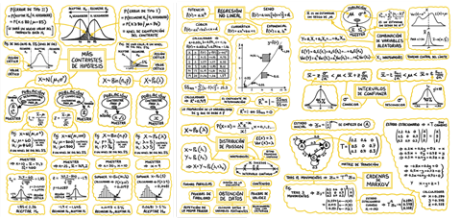
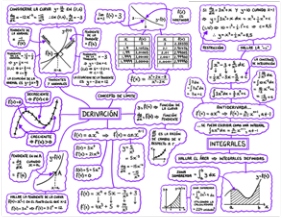
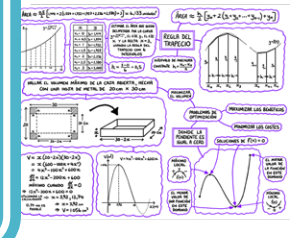
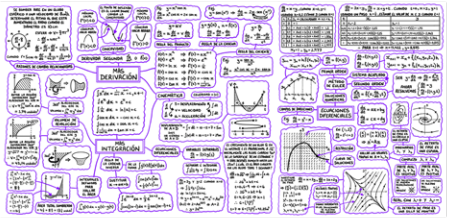
DIST. HA VIJADO DE A A D $= \int |v|\, dt = 10 + 12 + 7 = 29m$



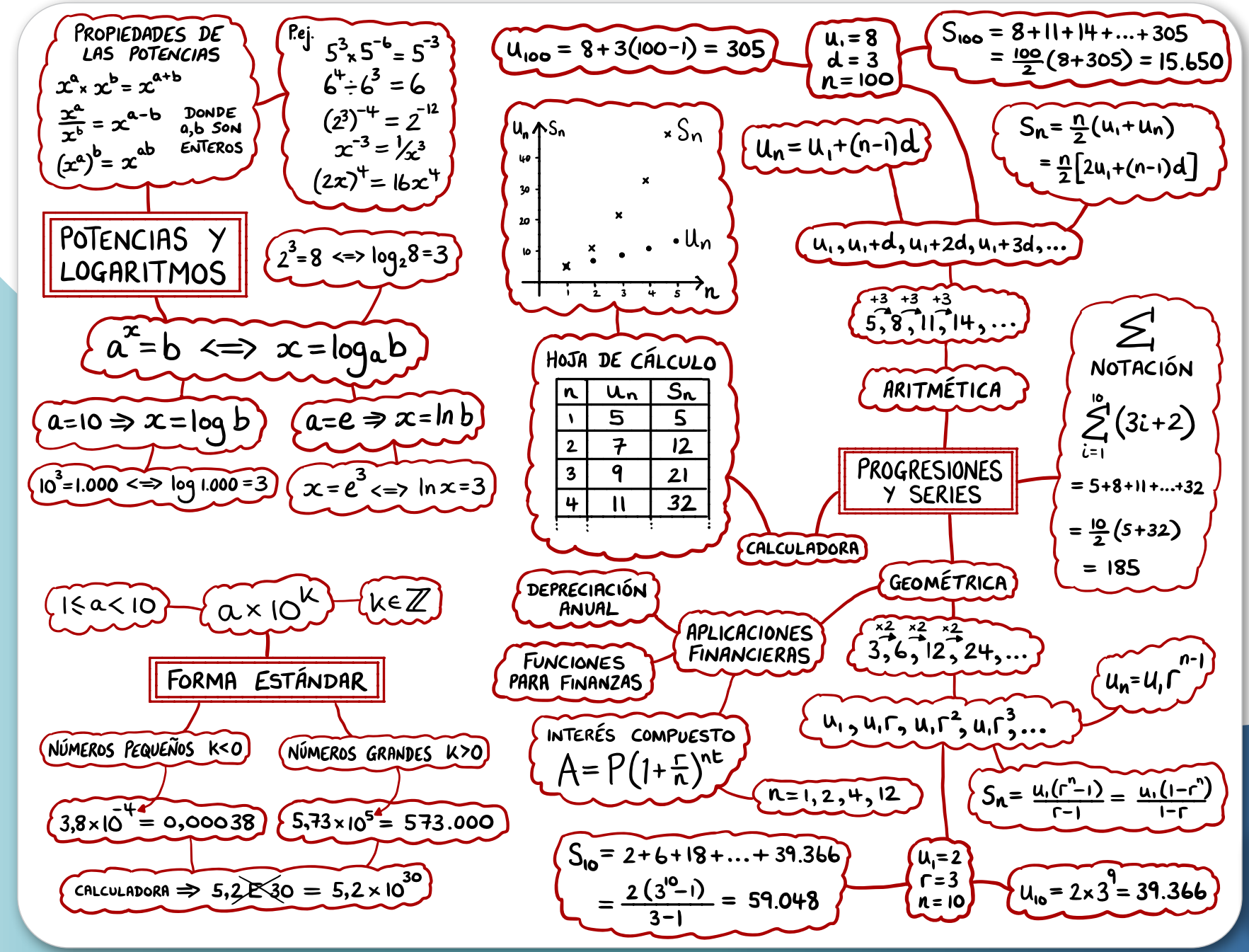
VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

	Análisis y enfoques TANS	Análisis y enfoques NM	Contenido común	Aplicaciones e interpretación NM	Aplicaciones e interpretación TANS
Aritmética y álgebra					
Funciones					
Geometría y trigonometría					
Estadística y probabilidad					
Análisis					

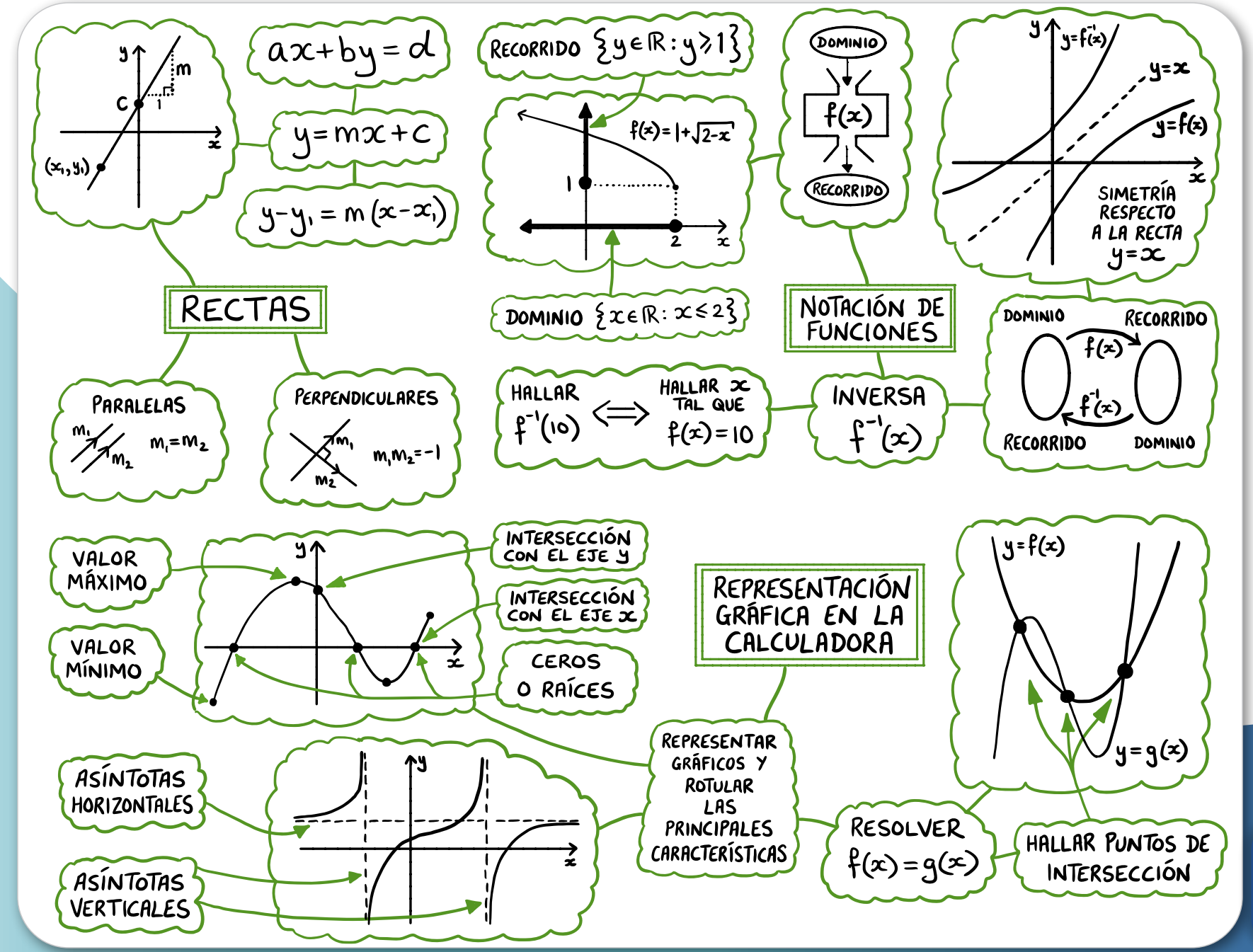
Aritmética y álgebra



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Funciones

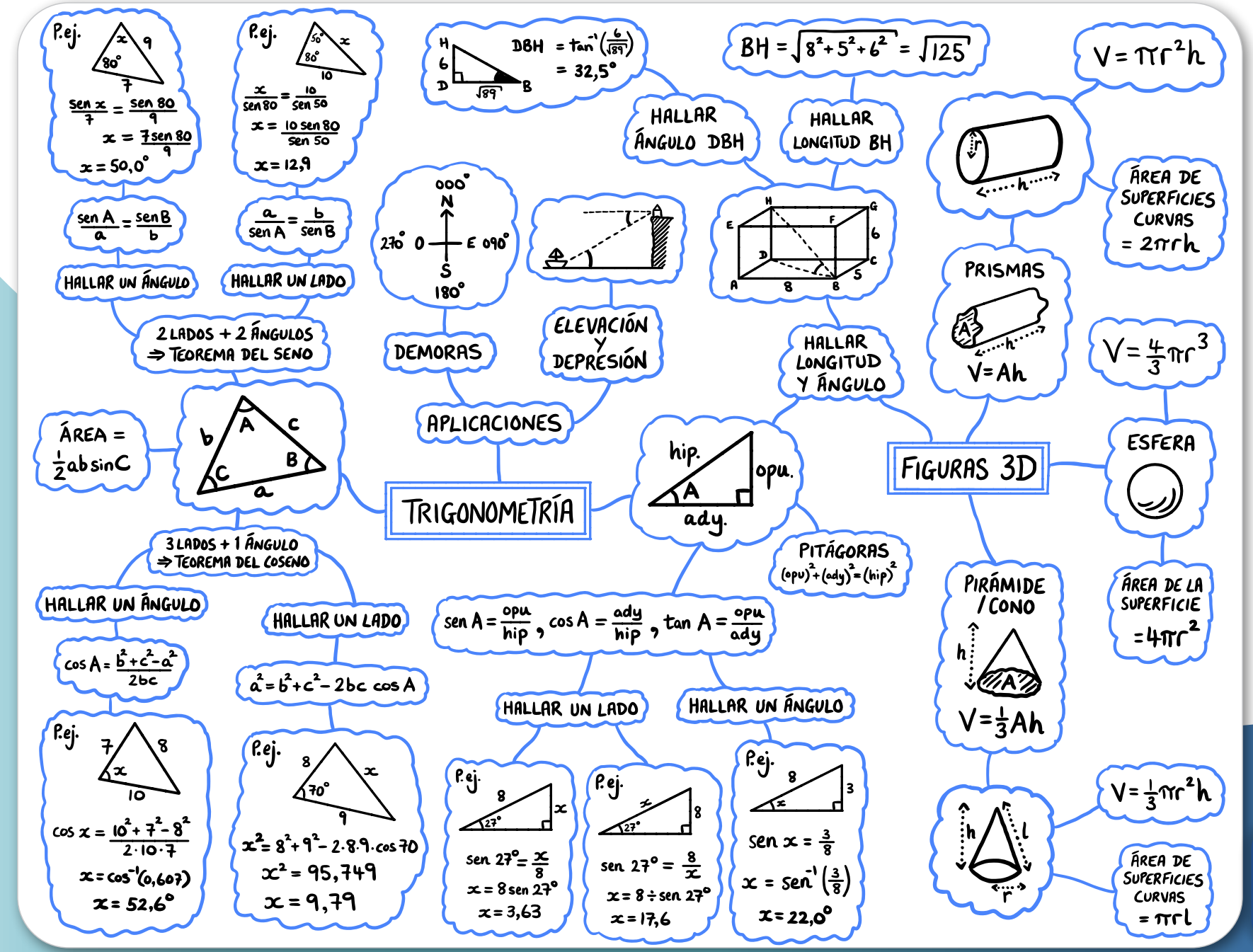
International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Geometría y trigonometría

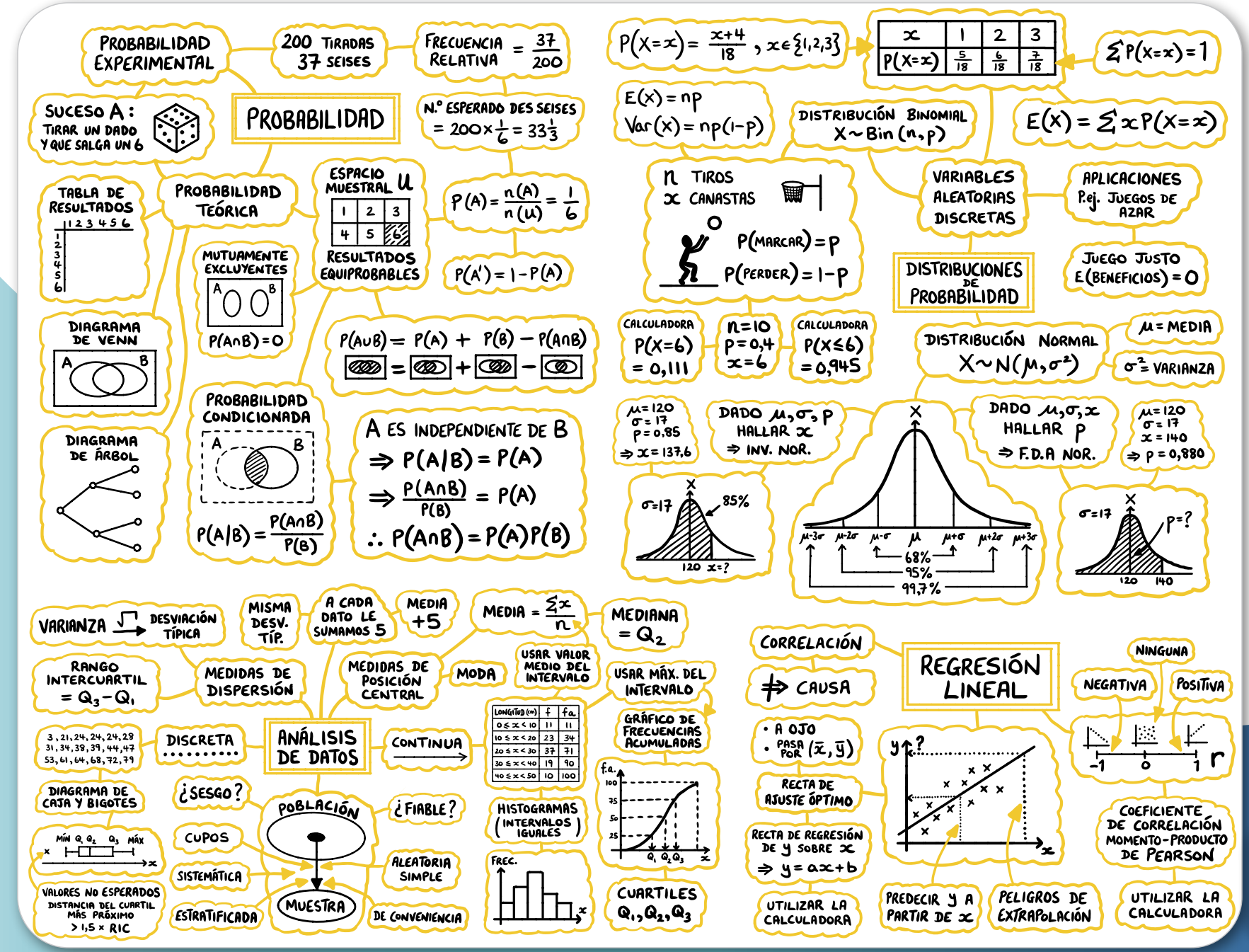
International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Estadística y probabilidad

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

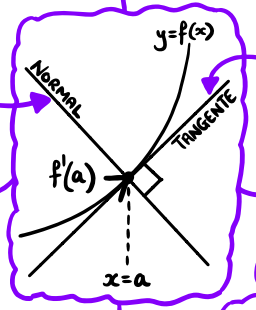
DERIVACIÓN

CONSIDERAR LA CURVA $y=\frac{12}{x}$ EN (2,6)

$\frac{dy}{dx}=-12x^{-2}=\frac{-12}{x^2}$ ∴ EN (2,6), $\frac{dy}{dx}=-3$

PENDIENTE DE LA NORMAL $=\frac{-1}{f'(a)}$

PENDIENTE DE LA TANGENTE $=f'(a)$



PENDIENTE DE LA NORMAL $=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+c$

$(2,6)\Rightarrow 6=\frac{2}{3}+c$

$\Rightarrow c=\frac{16}{3}$

LA ECUACIÓN DE LA NORMAL ES $y=\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$

PENDIENTE DE LA TANGENTE $=-3$

$\Rightarrow y=-3x+c$

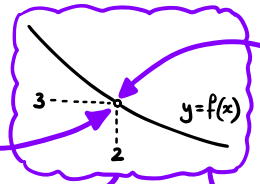
$(2,6)\Rightarrow 6=-3\cdot 2+c$

$\Rightarrow c=12$

LA ECUACION DE LA TANGENTE ES $y=-3x+12$

TANGENTES Y NORMALES

$\lim_{x\to 2} f(x)=3$



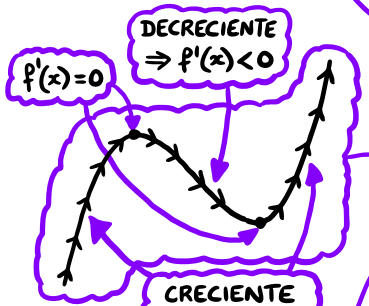
f(2) ES INDEFINIDA

x	f(x)
1	5
1,9	3,10526
1,99	3,01005
1,999	3,00100
1,9999	3,00010

x	f(x)
3	2,33333
2,1	2,90476
2,01	2,99005
2,001	2,99900
2,0001	2,99990

$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$

CONCEPTO DE LÍMITE



y, f(x) ⇒ FUNCIÓN DE LA CURVA

$\frac{dy}{dx}$, f'(x) ⇒ FUNCIÓN PENDIENTE

$f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=anx^{n-1}$

$f(x)=3x^7$
$f'(x)=21x^6$

$f(x)=5=5x^0$
$f'(x)=0$

$y=\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$

$\frac{dy}{dx}=-15x^{-4}=\frac{-15}{x^4}$

$f(x)=x^4+5x-\frac{7}{x^2}+3$

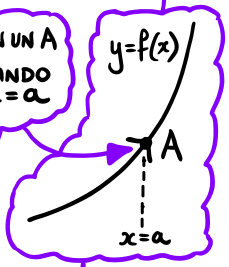
$f'(x)=4x^3+5+\frac{14}{x^3}$

$\frac{dV}{dr}$ ES LA RAZÓN DE CAMBIO DE V RESPECTO A r



PENDIENTE EN UN A $=\frac{dy}{dx}$ CUANDO $x=a$

$=f'(a)$



HALLAR LA PENDIENTE DE LA CURVA $f(x)=x^3-1$ EN EL PUNTO EN EL QUE $x=2$

$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(2)=3\cdot 2^2=12$

SI $\frac{dy}{dx}=3x^2+x$ Y $y=10$ CUANDO $x=1$

$\Rightarrow y=\int 3x^2+x\,dx=x^3+\frac{1}{2}x^2+c$

$(1,10)\Rightarrow 10=1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2+c \Rightarrow c=8{,}5$

$\therefore y=x^3+\frac{1}{2}x^2+8{,}5$

RESTRICCIÓN

HALLAR LA "+c"

$\int x^4-3+\frac{5}{x^2}\,dx$

$=\frac{1}{5}x^5-3x-\frac{5}{x}+c$

LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN

$\int 7dx=\int 7x^0dx=7x+c$

$\int 3x^4dx=\frac{3}{5}x^5+c$

$\int \frac{10}{x^3}dx=\int 10x^{-3}dx=\frac{10}{-2}x^{-2}+c=\frac{-5}{x^2}+c$

ANTIDERIVADA...

$f'(x)=ax^n \Rightarrow f(x)=\frac{a}{n+1}x^{n+1},\ n\neq -1$

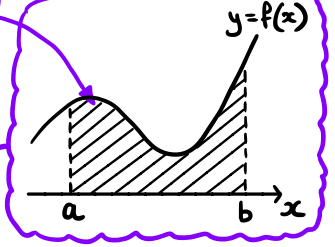
... SE PUEDA ESCRIBIR COMO UNA INTEGRAL

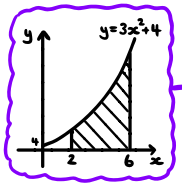
$\int ax^n dx=\frac{a}{n+1}x^{n+1},\ n\neq -1$

INTEGRALES

HALLAR EL ÁREA ⇒ INTEGRALES DEFINIDAS

ZONA SOMBREADA $=\int_a^b y\,dx$





ZONA SOMBREADA $=\int_2^6 3x^2+4\,dx$

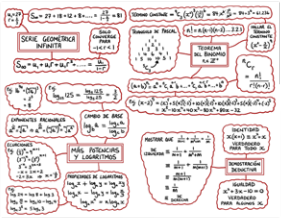
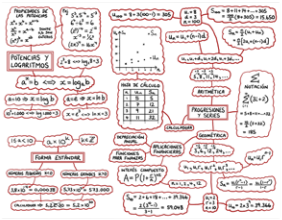
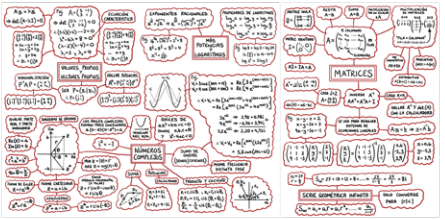
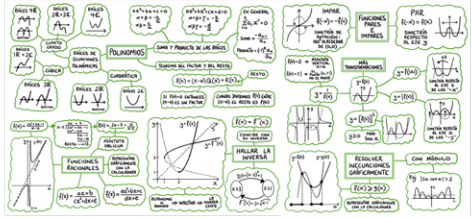
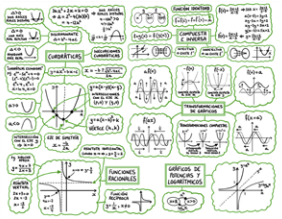
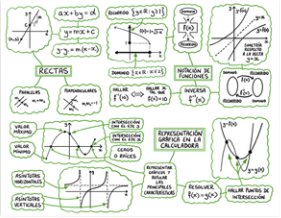
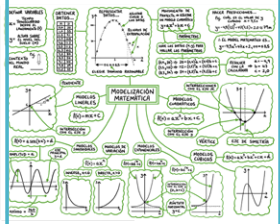
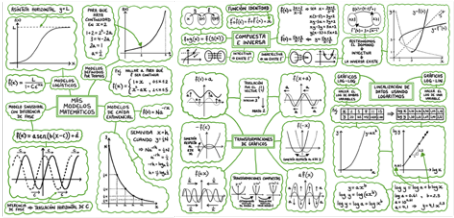
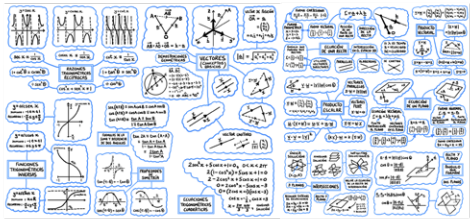
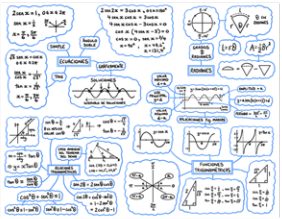
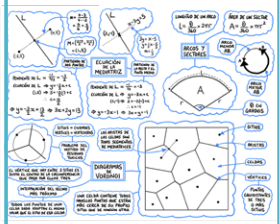
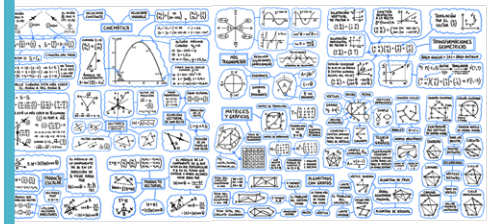
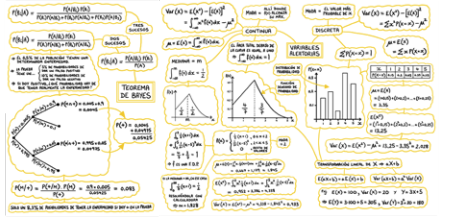
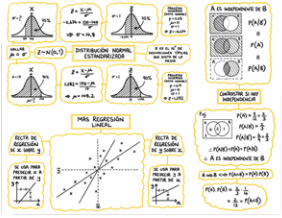
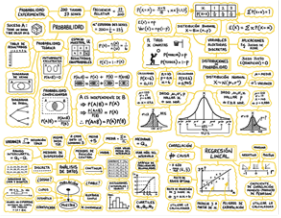
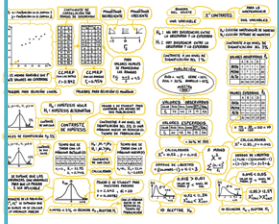
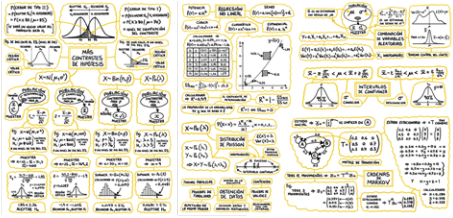
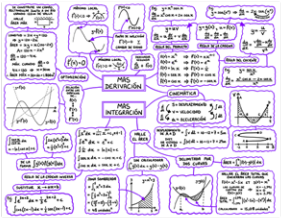
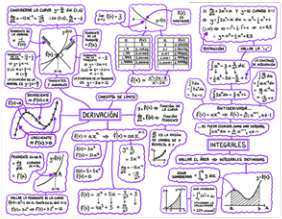
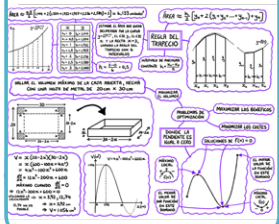
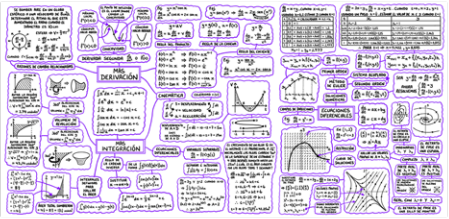
UTILIZANDO LA CALCULADORA

$=224$ unidades²

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

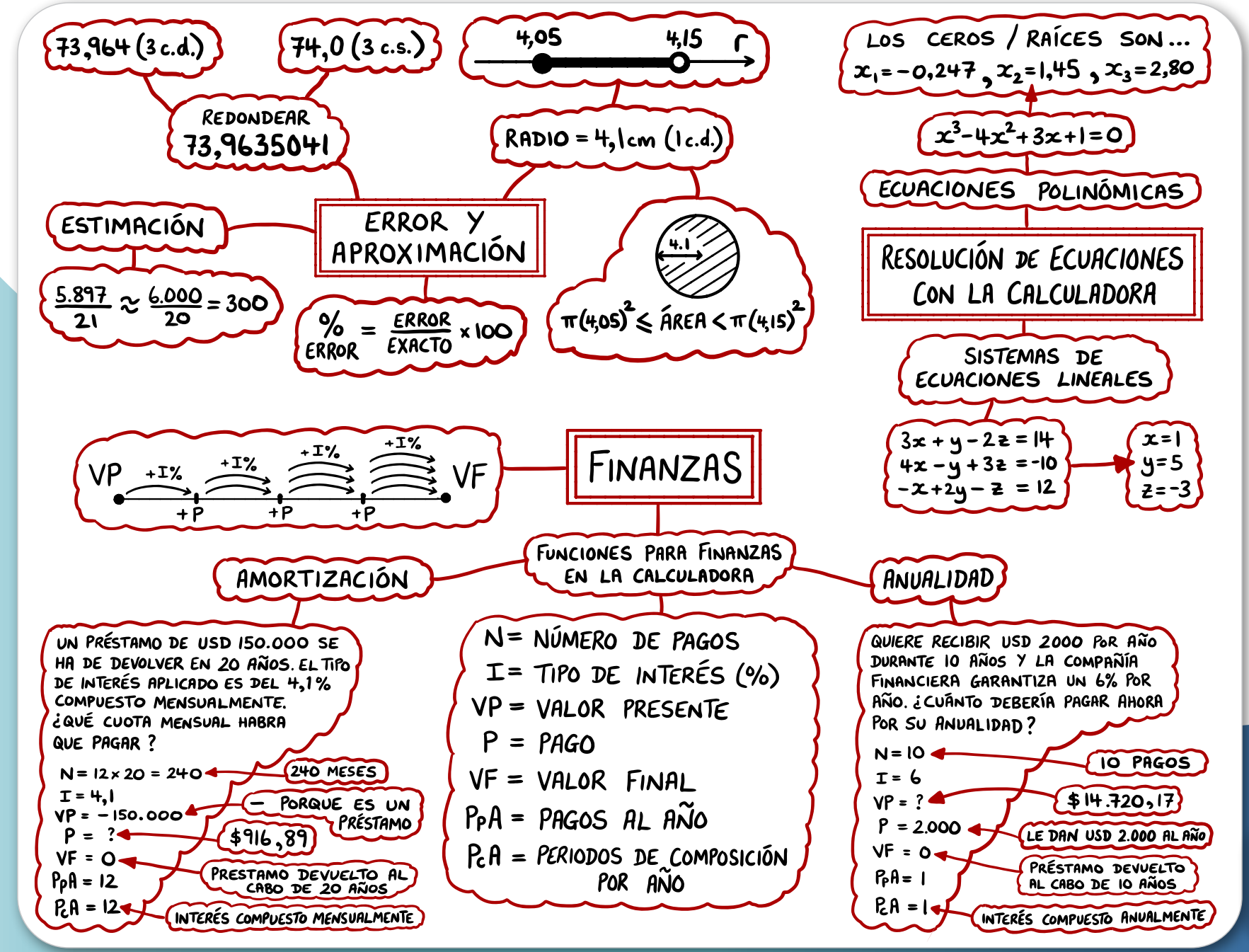
Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

	Análisis y enfoques TANS	Análisis y enfoques NM	Contenido común	Aplicaciones e interpretación NM	Aplicaciones e interpretación TANS
Aritmética y álgebra					
Funciones					
Geometría y trigonometría					
Estadística y probabilidad					
Análisis					

Aritmética y álgebra

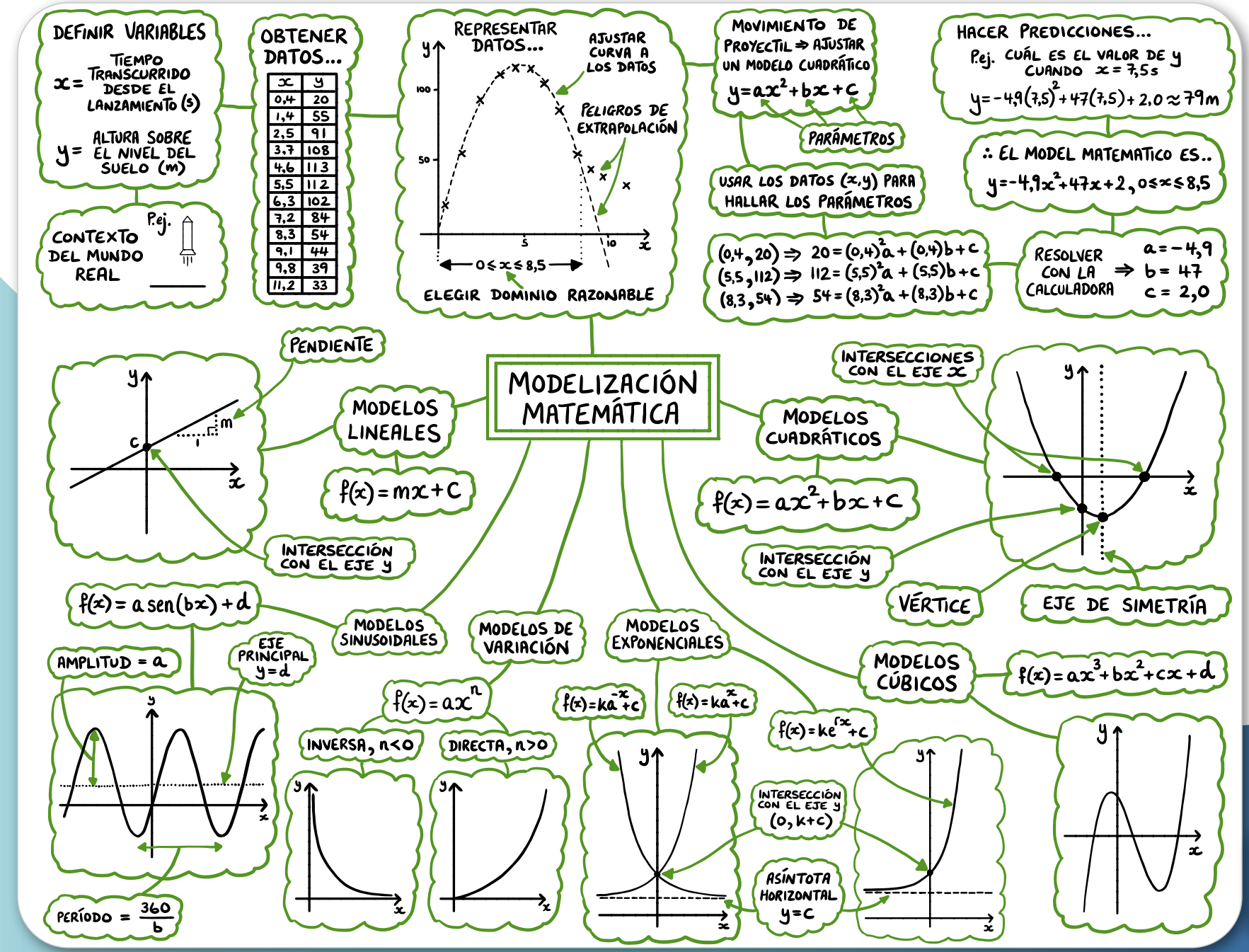
International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Funciones

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional



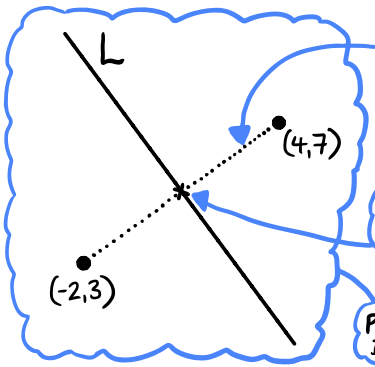
VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Geometría y trigonometría

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

ECUACIÓN DE LA MEDIATRIZ

PARTIENDO DE DOS PUNTOS



$m = \frac{7-3}{4--2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (1,5)$

Pendiente de L $= \frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2}$

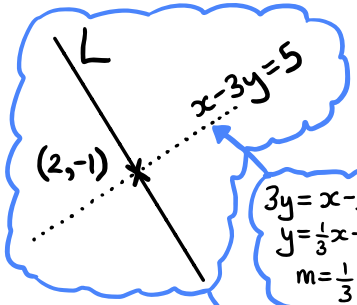
Ecuación de L $\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + c$

$(1,5) \Rightarrow 5 = -\frac{3}{2}(1) + c$

$\therefore c = \frac{13}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow 3x + 2y = 13$

PARTIENDO DE LA RECTA Y EL PUNTO MEDIO



$3y = x - 5$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

$m = \frac{1}{3}$

Pendiente de L $= \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

Ecuación de L $\Rightarrow y = -3x + c$

$(2,-1) \Rightarrow 2 = -3(-1) + c$

$\therefore c = -1$

$\Rightarrow y = -3x - 1 \Rightarrow 3x + y = -1$

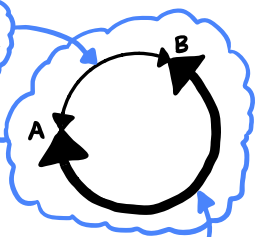
ARCOS Y SECTORES

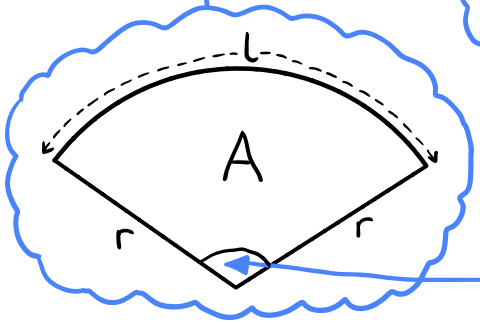
Longitud de un arco $L = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

Área de un sector $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

Arco menor AB

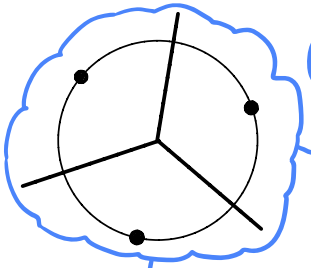
Arco mayor AB





θ en grados

DIAGRAMAS DE VORONOI

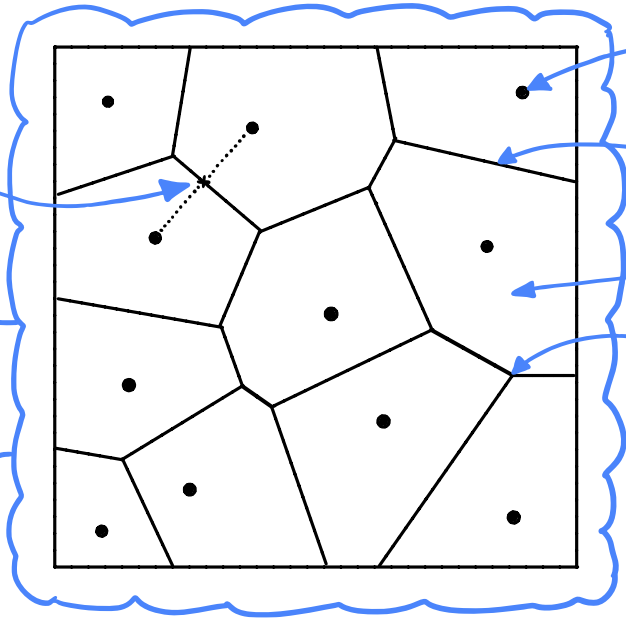


Sitios = ciudades
Vértices = vertederos

Problema del vertido de residuos tóxicos

El vértice que hay entre 3 sitios es justo el centro de la circunferencia que pasa por ellos tres.

Las aristas de las celdas son todas segmentos de mediatrices



Interpolación del vecino más próximo

Todos los puntos de una celda dada adoptan el mismo valor que el sitio de esa celda

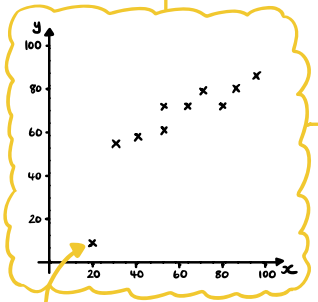
Una celda contiene todos aquellos puntos que están más cerca de su propio sitio que de ningún otro.

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Estadística y probabilidad

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

P.ej. x = PUNTUACIÓN EN EL EXAMEN 1
y = PUNTUACIÓN EN EL EXAMEN 2



r_S ES MENOS SENSIBLE QUE r ANTE VALORES NO ESPERADOS

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN POR RANGOS DE SPEARMAN

x	y
20	9
30	56
41	58
53	61
53	72
64	72
71	79
80	72
85	80
96	85

CCMRP CON LOS DATOS
$r = 0.842$

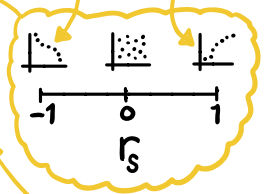
RANGO x	RANGO y	d
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4,5	4	0.5
4,5	6	-1,5
6	6	0
7	8	-1
8	6	2
9	9	0
10	10	0

CCMRP CON LOS RANGOS
$r_S = 0.954$

PARA VALORES IGUALES SE PROMEDIAN LOS RANGOS
P.ej. $\frac{4+5}{2} = 4,5$

MONÓTONA DECRECIENTE

MONÓTONA CRECIENTE

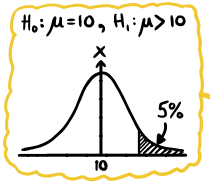


PRUEBAS PARA RELACIÓN LINEAL

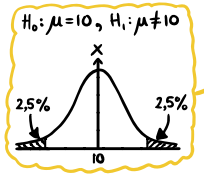
PRUEBAS PARA RELACIÓN ES MONÓTONA

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

H_0 : HIPÓTESIS NULA
H_1 : HIPÓTESIS ALTERNATIVA



CONTRASTE DE UNA COLA



CONTRASTE DE DOS COLAS

NIVELES DE SIGNIFICACIÓN P.ej. 5%

PRUEBA t DE STUDENT PARA COMPARAR LAS MEDIAS DE DOS POBLACIONES

CONTRASTAR A UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL 5% SI UNA MÁQUINA NUEVA HA REDUCIO EL TIEMPO DE FABRICACIÓN

TIEMPO QUE SE TARDA CON LA MÁQUINA ANTIGUA (s)

51,9	52,7	52,6	52,5	53,1	54,0
53,6	53,0	53,3	52,9	51,7	54,1

$n_1 = 12$, $\bar{x}_1 = 52,95$, $s_1 = 0,7416$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 > \mu_2$

CONTRASTE DE UNA COLA

CALCULADORA

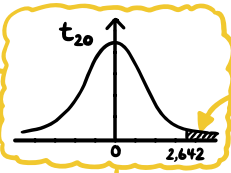
TIEMPO QUE SE TARDA CON LA MÁQUINA NUEVA (s)

52,1	51,3	52,4	53,2	51,8	
51,0	51,8	52,8	52,3	52,7	

$n_2 = 10$, $\bar{x}_2 = 52,14$, $s_2 = 0,6835$

SE SUPONE QUE LAS VARIANZAS SON NORMALES PARA QUE LA PRUEBA t SEA APLICABLE

VARIANZAS DE LA POBLACIÓN σ_1^2, σ_2^2 SE SUPONEN QUE SON IGUALES ⇒ SE CALCULA LA VARIANZA PAREDA



PRUEBA t DE STUDENT PARA MUESTRAS PAREDAS
$t = 2,642$, $dl = 20$
$P = 0,00782$

$0,00782 < 5\%$ ⇒ RECHAZAR H_0, ACEPTAR H_1

CON LA MÁQUINA NUEVA SE HA REDUCIDO EL TIEMPO DE FABRICACIÓN

χ^2 CONTRASTES

BONDAD DEL AJUSTE

UNA VARIABLE

H_0 : NO HAY DIFERENCIAS ENTRE LO OBSERVADO Y LO ESPERADO
H_1 : HAY DIFERENCIA ENTRE LO OBSERVADO Y LO ESPERADO

CONTRASTE A UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL 1 %

POBLACIÓN
ROJO = 40% VERDE = 20%
AZUL = 30% AMARILLO = 10%
MUESTRA

VALORES OBSERVADOS

COLOR	ROJO	AZUL	VERDE	AMARILLO	TOTAL
f_o	74	40	17	19	150

VALORES ESPERADOS

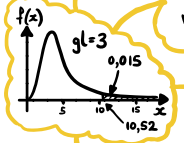
COLOR	ROJO	AZUL	VERDE	AMARILLO	TOTAL
f_E	60	45	30	15	150

= 30% DE 150

CALCULADORA
$\chi^2 = 10,52$, $P = 0,015$

A MANO
$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

GRADOS DE LIBERTAD
= (COLUMNAS − 1) = 4 − 1 = 3



$0,015 > 0,01$
VALOR DE PARAM. P < NIVEL DE SIG.

$10,52 < 11,34$
$\chi^2_{CALC} < \chi^2_{CRIT}$

⇒ ACEPTAR H_0

PARA LA INDEPENDENCIA

DOS VARIABLES

H_0: ELECCIÓN INDEPENDIENTE DE INGRESOS
H_1: ELECCIÓN DEPENDE DE INGRESOS

CONTRASTE A UN NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL 5%

VALORES OBSERVADOS f_o

	A	B	C	D	
BAJO	13	19	7	11	50
MEDIO	5	9	5	11	30
ALTO	12	12	13	3	40
	30	40	25	25	120

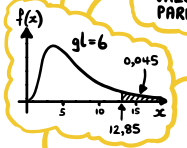
VALORES ESPERADOS f_E

	A	B	C	D	
BAJO	12,5	16,7	10,4	10,4	50
MEDIO	7,5	10,0	6,3	6,3	30
ALTO	10,0	13,3	8,3	8,3	40
	30	40	25	25	120

$= \frac{40}{120} \times \frac{30}{120} \times 120 = 10$

CALCULADORA
$\chi^2 = 12,85$, $P = 0,045$

GRADOS DE LIBERTAD
= (FILAS − 1)(COLUMNAS − 1)
= (3 − 1)(4 − 1) = 2 × 3 = 6



$0,045 < 0,05$
VALOR DE PARAM. P < NIVEL DE SIG.

$12,85 > 12,59$
$\chi^2_{CALC} > \chi^2_{CRIT}$

⇒ RECHAZAR H_0, ACEPTAR H_1

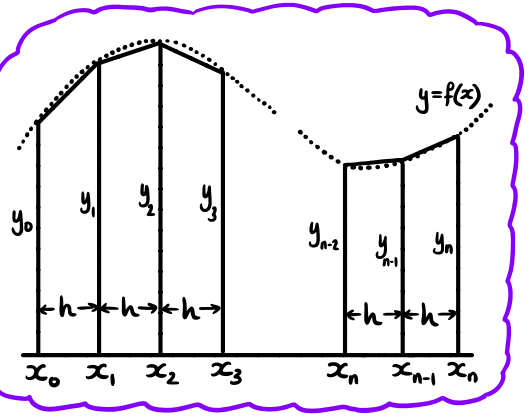
VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Análisis

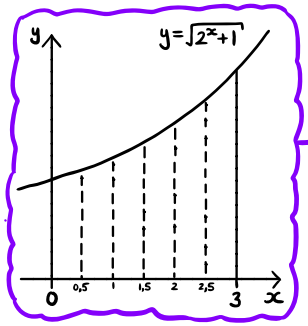
International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

REGLA DEL TRAPECIO

$$\text{ÁREA} \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + y_n\right]$$



ESTIMAR EL ÁREA QUE QUEDA DELIMITADA POR LA CURVA $y=\sqrt{2^x+1}$, EL EJE y, EL EJE x Y LA RECTA $x=3$, USANDO LA REGLA DEL TRAPECIO CON 6 INTERVALOS



x	y
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,414$
$x_1 = 0,5$	$y_1 = 1,554$
$x_2 = 1$	$y_2 = 1,732$
$x_3 = 1,5$	$y_3 = 1,957$
$x_4 = 2$	$y_4 = 2,236$
$x_5 = 2,5$	$y_5 = 2,580$
$x_6 = 3$	$y_6 = 3,000$

$$\text{ÁREA} \approx \frac{0,5}{2}\left[1,414 + 2(1,554 + 1,732 + 1,957 + 2,236 + 2,580) + 3\right] = 6,133 \text{ unidades}^2$$

$$h = \frac{3-0}{6} = 0,5$$

INTERVALO DE ANCHURA CONSTANTE $h = \frac{x_n - x_0}{n}$

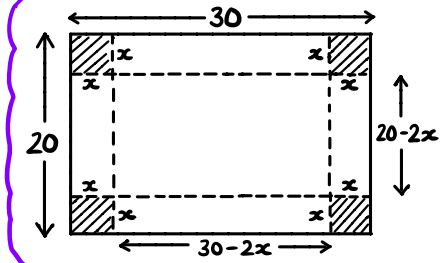
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

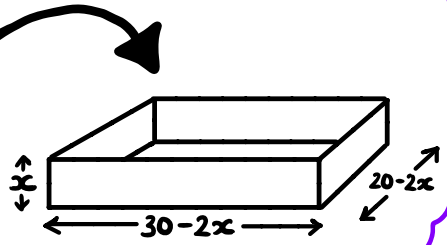
MAXIMIZAR LOS BENEFICOS

MINIMIZAR LOS COSTES

MAXIMIZAR EL VOLUMEN

HALLAR EL VOLUMEN MÁXIMO DE LA CAJA ABIERTA, HECHA CON UNA HOJA DE METAL DE 20cm × 30cm





$$V = x(20-2x)(30-2x)$$
$$= x(600 - 100x + 4x^2)$$
$$= 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$$

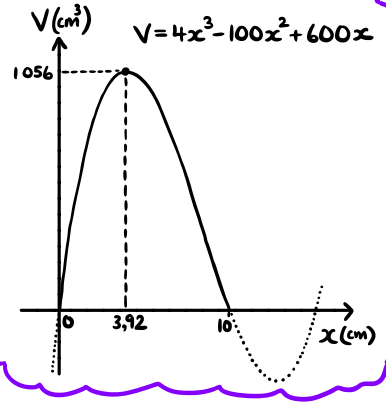
MÁXIMO CUANDO $\frac{dV}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0$$

UTILIZANDO LA CALCULADORA $\Rightarrow x = 3,92, 12,74$

12,74 NO ES POSIBLE $\Rightarrow x = 3,92$ cm

$\Rightarrow V = 1056$ cm^3



DONDE LA PENDIENTE ES IGUAL A CERO

SOLUCIONES DE $f'(x) = 0$

MÁXIMO LOCAL



EL MAYOR VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESTE DOMINIO

EL MENOR VALOR DE UNA FUNCIÓN EN ESTE DOMINIO

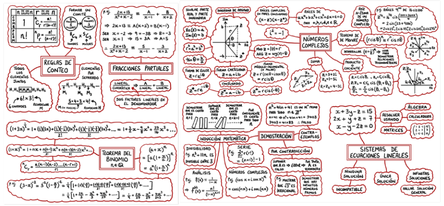
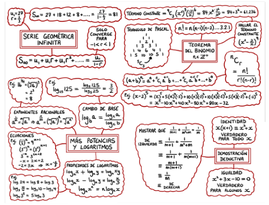
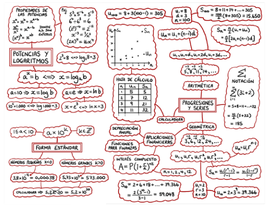
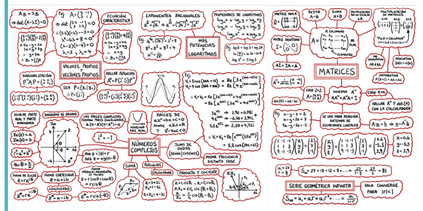
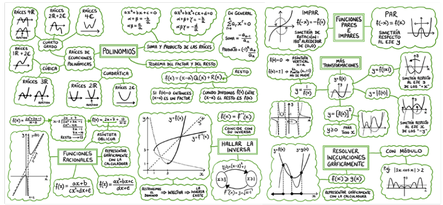
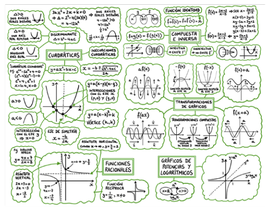
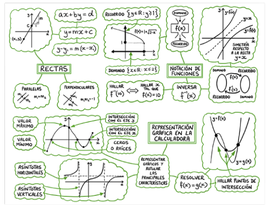
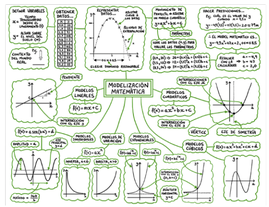
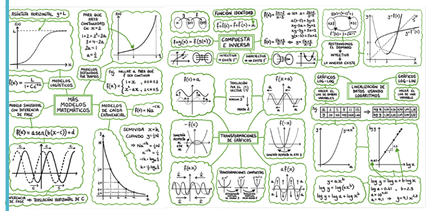
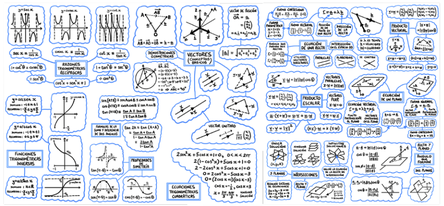
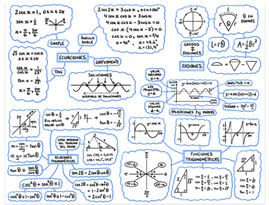
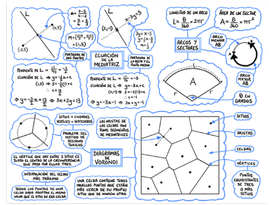
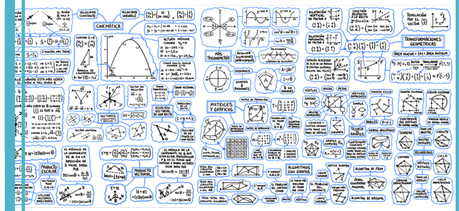
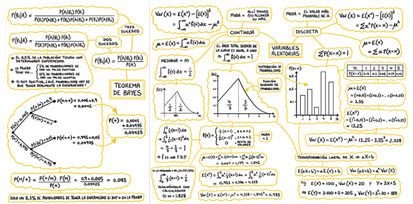
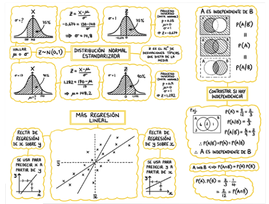
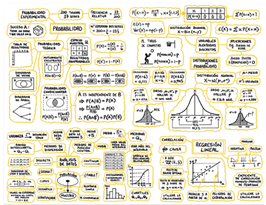
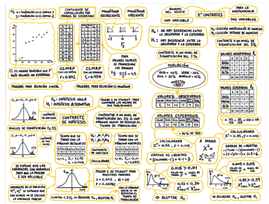
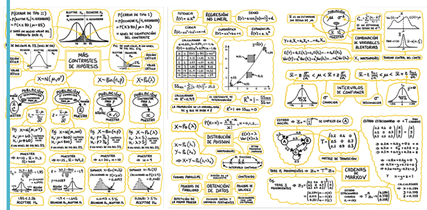
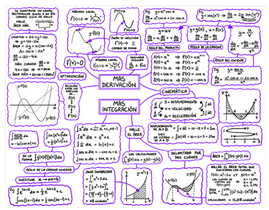
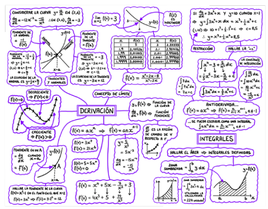
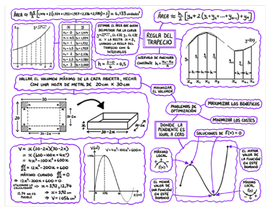
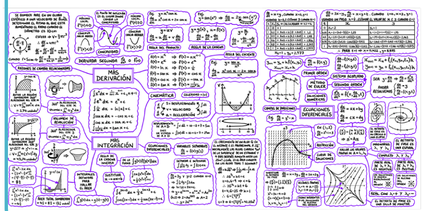
MÍNIMO LOCAL



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Mapa conceptual de Matemáticas

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

	Análisis y enfoques TANS	Análisis y enfoques NM	Contenido común	Aplicaciones e interpretación NM	Aplicaciones e interpretación TANS
Aritmética y álgebra					
Funciones					
Geometría y trigonometría					
Estadística y probabilidad					
Análisis					

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Aritmética y álgebra

VALORES Y VECTORES PROPIOS

$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = 0$

P.ej. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\therefore (5-\lambda)(1-\lambda) - -3 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$

$\lambda_1 = 2 \;,\; \lambda_2 = 4$

ECUACIÓN CARACTERISTICA

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 5x - y = 2x$

$3x + y = 2y$

$\therefore y = 3x$

$\therefore \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t$

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 5x - y = 4x$

$3x + y = 4y$

$\therefore x = y$

$\therefore \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t$

DIAGONALIZACIÓN

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

SEA $P = (\underline{x}_1 | \underline{x}_2)$

$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

HALLAR POTENCIAS

$A^k = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}P^{-1}$

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

MÁS POTENCIAS Y LOGARITMOS

EXPONENTES RACIONALES

$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \Rightarrow a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

P.ej. $16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

$8^{\frac{1}{6}} \times 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$

$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$\log_a x^n = n\log_a x$

P.ej. $\log 8 + \log 3 = \log 24$

$\ln\left(\frac{10}{4}\right) = \ln 10 - \ln 4$

$\log 3^5 = 5\log 3$

NÚMEROS COMPLEJOS

$i^2 = -1$

RAÍCES DE $ax^2+bx+c=0$ DONDE $a,b,c \in \mathbb{R}$ Y $b^2-4ac<0$

NINGUNA RAÍZ REAL

LAS RAICES COMPLEJAS FORMAN PARES CONJUGADOS

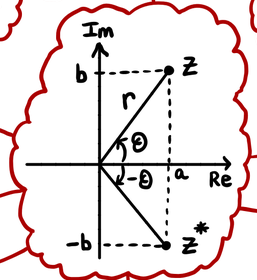
$a(x-z)(x-z^*)=0$

IGUALAR PARTE REAL Y PARTE IMAGINARIA

$\text{Re}(z) = a$

$\text{Im}(z) = b$

DIAGRAMA DE ARGAND



$r^2 = a^2 + b^2$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

MOD $z = |z| = r$

ARG $z = \arg(z) = \theta$

FORMA DE EULER

$z = re^{i\theta}$

FORMA CARTESIANA

$z = a + ib$

FORMA MÓDULO-ARGUMENTAL (O POLAR)

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$= r\,\text{cis}\,\theta$

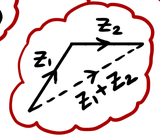
CONJUGADO

$z^* = re^{-i\theta}$

$z^* = a - ib$

$z^* = r\,\text{cis}(-\theta)$

SUMA



$z_1 = 3 + 2i$

$z_2 = 1 - 5i$

$z_1 + z_2 = 4 - 3i$

POTENCIAS

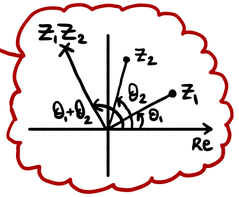
CALCULADORA

PRODUCTO Y COCIENTE

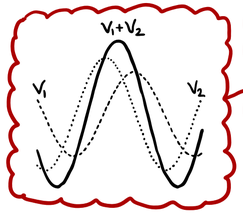
$z_1 = r_1\,\text{cis}\,\theta_1 \;,\; z_2 = r_2\,\text{cis}\,\theta_2$

$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}\,(\theta_1 - \theta_2)$



SUMA DE ONDAS (SENOS | COSENOS)



P.ej.

$V_1 = 3\cos(20t+15) = \text{Re}\left[3e^{(20t+15)i}\right]$

$V_2 = 4\cos(20t+100) = \text{Re}\left[4e^{(20t+100)i}\right]$

$\therefore V_1 + V_2 = \text{Re}\left[3e^{(20t+15)i} + 4e^{(20t+100)i}\right]$

$= \text{Re}\left[e^{20ti}(3e^{15i} + 4e^{100i})\right]$

$3e^{15i} \Rightarrow 2{,}90 + 0{,}78i$

$4e^{100i} \Rightarrow -0{,}70 + 3{,}94i +$

$5{,}2e^{65i} \Leftarrow 2{,}20 + 4{,}72i$

$\therefore V_1 + V_2 = \text{Re}\left[e^{20ti}(5{,}2e^{65i})\right]$

$= 5{,}2\cos(20t+65)$

MISMA FRECUENCIA DISTINTA FASE

MATRICES

MATRIZ NULA

$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

RESTA $A-B$

SUMA $A+B$

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR kA

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 3 & \cdot \\ 3 & 2 & \cdot \\ 2 & 1 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 23 & \cdot \end{pmatrix}$

2×4 4×3 2×3

"FILA × COLUMNA"

1×4 + 2×3 + 5×2 + 3×1

MATRIZ IDENTIDAD

$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

$AI = IA = A$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ m FILAS

n COLUMNAS

ELEMENTOS

NO CONMUTATIVO $AB \neq BA$

ASOCIATIVO $(AB)C = A(BC)$

DISTRIBUTIVO $A(B+C) = AB + AC$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$

CASO 2×2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

INVERSA A^{-1}

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

CASO $n\times n$

HALLAR A^{-1} Y $\det(A)$ CON LA CALCULADORA

P.ej. $x - y - z = 2$

$x + y + 3z = 7$

$9x - y - 3z = -1$

SE USA PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -5{,}3 \\ 3{,}9 \end{pmatrix}$

$x = 0{,}6$

$y = -5{,}3$

$z = 3{,}9$

SERIE GEOMÉTRICA INFINITA

$u_1 = 27$

$r = \frac{2}{3}$

$S_\infty = 27 + 18 + 12 + 8 + \ldots = \frac{27}{1-\frac{2}{3}} = \frac{27}{\frac{1}{3}} = 81$

SOLO CONVERGE PARA $|r|<1$

$S_\infty = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-r}$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

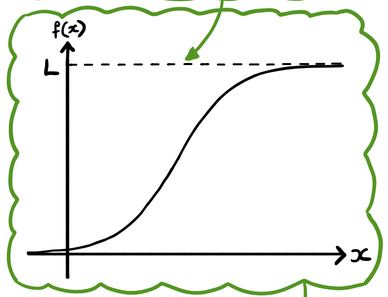
Funciones

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MÁS MODELOS MATEMÁTICOS

MODELOS LOGÍSTICOS

ASÍNTOTA HORIZONTAL $y=L$



$$f(x)=\frac{L}{1+Ce^{-kx}}$$

MODELOS DEFINIDOS POR TRAMOS

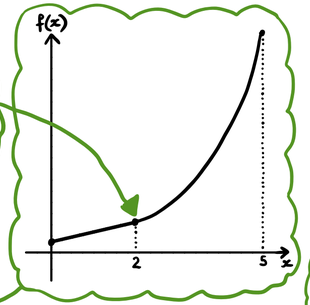
PARA QUE HAYA CONTINUIDAD EN $x=2$

$1+2=2^2-2a$

$3=4-2a$

$2a=1$

$a=\frac{1}{2}$



P.ej. HALLAR a PARA QUÉ f SEA CONTINUA

$$f(x)=\begin{cases}1+x & ,\ 0\le x\le 2\\ x^2-ax & ,\ 2<x\le 5\end{cases}$$

MODELOS DE CAÍDA EXPONENCIAL

$$f(x)=Na^{-rx}$$

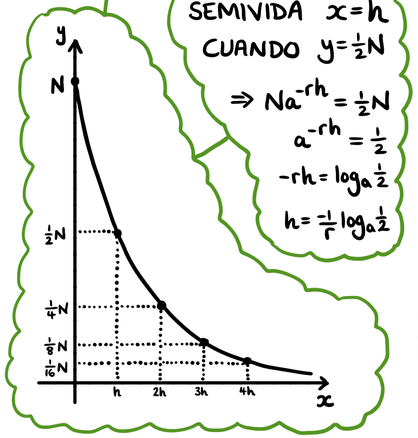
SEMIVIDA $x=h$ CUANDO $y=\frac{1}{2}N$

$\Rightarrow Na^{-rh}=\frac{1}{2}N$

$a^{-rh}=\frac{1}{2}$

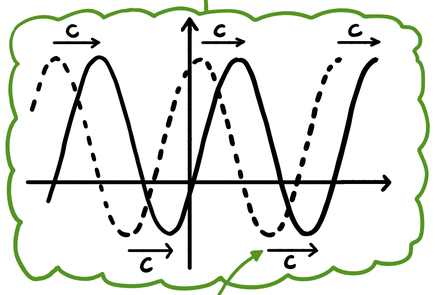
$-rh=\log_a\frac{1}{2}$

$h=\frac{-1}{r}\log_a\frac{1}{2}$



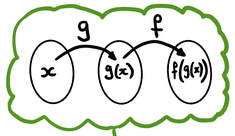
MODELO SINUSOIDAL CON DIFERENCIA DE FASE

$$f(x)=a\,\mathrm{sen}(b(x-c))+d$$

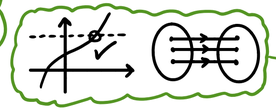


DIFERENCIA DE FASE $\Rightarrow$ TRASLACIÓN HORIZONTAL DE C

COMPUESTA E INVERSA



$fog(x)=f(g(x))$



INYECTIVA $\Rightarrow$ EXISTE f^{-1}

SOBREYECTIVA $\Rightarrow$ NO EXISTE f^{-1}

FUNCIÓN IDENTIDAD

$f^{-1}of(x)=fof^{-1}(x)=x$

$f(x)=\frac{3x+2}{x-5}$ $\Rightarrow$ SEA $x=\frac{3y+2}{y-5}$

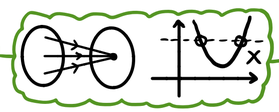
$x(y-5)=3y+2$

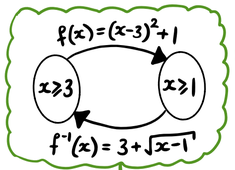
$xy-5x=3y+2$

$xy-3y=5x+2$

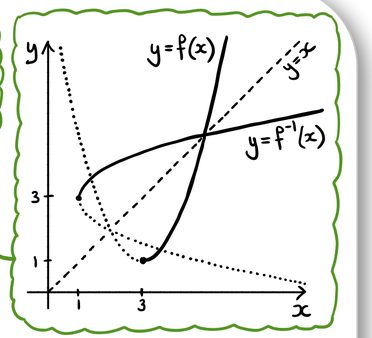
$y(x-3)=5x+2$

$f^{-1}(x)=\frac{5x+2}{x-3}$ $\Leftarrow$ $y=\frac{5x+2}{x-3}$

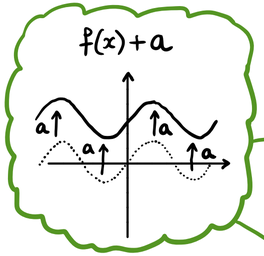




RESTRINGIMOS EL DOMINIO $\Rightarrow$ INYECTIVA $\Rightarrow$ LA INVERSA EXISTE



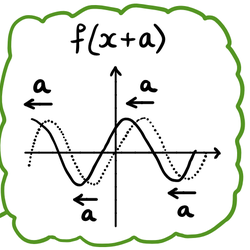
TRANSFORMACIONES DE GRÁFICOS

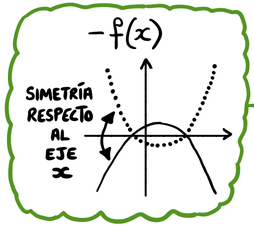


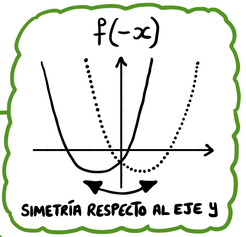
TRASLACIÓN POR EL VECTOR $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

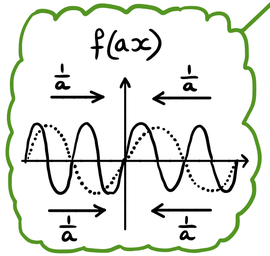
DERECHA 3

ABAJO 2

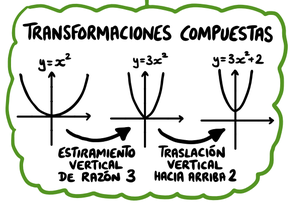


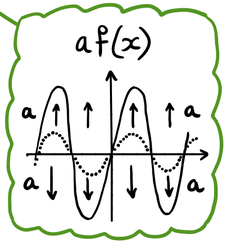






TRANSFORMACIONES COMPUESTAS





LINEALIZACIÓN DE DATOS USANDO LOGARITMOS

GRÁFICOS LOG-LOG

HACER EL LOG DE AMBAS VARIABLES

GRÁFICOS LOG-LIN

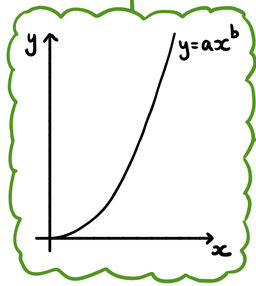
HACER EL LOG DE UNA VARIABLE

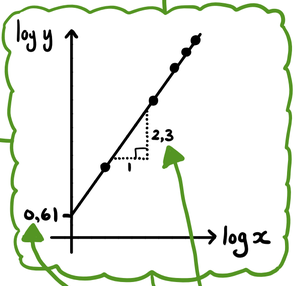
P.ej.

x	2	5	8	11	15
y	20	165	492	1.020	2.100

$\Rightarrow$

$\log x$	0,30	0,70	0,90	1,04	1,18
$\log y$	1,30	2,22	2,69	3,00	3,32





$y=ax^b$

$\log y=\log(ax^b)$

$\log y=\log a+\log x^b$

$\log y=\log a+b\log x$

$\log a=0{,}61$, $b=2{,}3$

$a=10^{0{,}61}$

$a=4{,}1$ $\Rightarrow$ $y=4{,}1x^{2{,}3}$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Geometría y trigonometría

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

CINEMÁTICA

EL AVIÓN A SALE A LAS 12.00 en (2,-2,8) con $\left(\frac{1}{3}\right)$ km/min

EL AVIÓN B SALE A LAS 12.02 en (10,5,6) con $\left(\frac{-1}{4}\right)$ km/min

$\underline{r}_A = \begin{pmatrix}2\\-2\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\underline{r}_B = \begin{pmatrix}10\\5\\6\end{pmatrix} + (t-2)\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ (2 MINUTOS MÁS TARDE)

CHOCAN SI $\underline{r}_A = \underline{r}_B$

$2+t = 10-(t-2) \Rightarrow t=5$
$-2+2t = 5+3(t-2) \Rightarrow t=-1$
$8+3t = 6+4(t-2) \Rightarrow t=10$
} NO TODOS A LA VEZ ∴ NO HAY CHOQUE

HALLE CUÁNDO ESTA MÁS CERCA EL AVIÓN A DEL AVIÓN B

$\overrightarrow{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A$
$= \begin{pmatrix}10-(t-2)\\5+3(t-2)\\6+4(t-2)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2+t\\-2+2t\\8+3t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10-2t\\1+t\\-10+t\end{pmatrix}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-2t)^2+(1+t)^2+(-10+t)^2}$
$= \sqrt{6t^2-58t+201}$

A ESTÁ LO MÁS CERCA DE B CUANDO $|\overrightarrow{AB}|$ ES MÍNIMA

$\therefore \frac{d}{dt}(6t^2-58t+201) = 0$
$\Rightarrow 12t-58=0 \Rightarrow t = 4\frac{5}{6}$
$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 7.8$ km

VELOCIDAD CONSTANTE

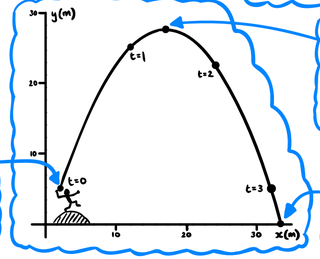
VELOCIDAD VARIABLE

$\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\30-20t\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

$x_t = x_0 + \int 10\,dt = 2+10t$
$y_t = y_0 + \int 30-20t\,dt = 5+30t-10t^2$

CUANDO $t=0$: $\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\30\end{pmatrix}$

ÁNGULO DE LANZAMIENTO $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{10}\right) = 71.6°$



ALTURA MÁXIMA CUANDO $v_y = 0$
$\Rightarrow 30-20t=0$
$\Rightarrow t = 1{,}5$ s
$\Rightarrow x = 17$ m, $y = 27{,}5$ m

CHOCA CON EL SUELO CUANDO $y=0$
$\Rightarrow 5+30t-10t^2=0$
$\Rightarrow t = -0{,}28$, $t = 3{,}16$ s
$\Rightarrow x = 2+10(3{,}16) = 33{,}6$ m

VECTORES (CONCEPTOS BÁSICOS)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

VECTOR DE POSICIÓN $\overrightarrow{OA} = \underline{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$

$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

VECTOR UNITARIO $\frac{1}{|\underline{v}|}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA RECTA

FORMA PARAMÉTRICA $x = 3+2\lambda$, $y = 5-\lambda$, $z = -1+4\lambda$

FORMA VECTORIAL $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

DIRECCIÓN DE LA RECTA

$\underline{r} = \underline{a} + \lambda\underline{b}$

POSICIÓN DE UN PUNTO EN UNA RECTA

PRODUCTO ESCALAR

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}|\cos\theta$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

VECTORES PERP. $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$

ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS
$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$
$\underline{r}_2 = \begin{pmatrix}9\\4\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$
UTILIZAR VECTORES DIRECTORES

$\cos\theta = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|}$ $\therefore |\underline{a}| = |\underline{a}|\cos\theta$

EL MÓDULO DE LA COMPONENTE DE $\underline{a}$ EN LA DIRECCIÓN DE $\underline{b}$ VIENE DADO POR $|\underline{a}|\cos\theta = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|}$

PRODUCTO VECTORIAL

$\underline{v}\times\underline{w} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_2w_3 - v_3w_2\\v_3w_1 - v_1w_3\\v_1w_2 - v_2w_1\end{pmatrix}$

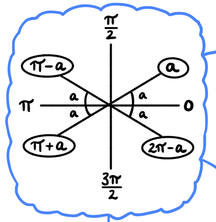
ÁREA $= \frac{1}{2}|\underline{v}\times\underline{w}|$

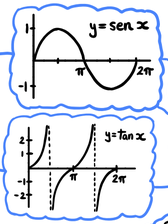
$|\underline{v}\times\underline{w}| = |\underline{v}||\underline{w}|\operatorname{sen}\theta$

EL MÓDULO DE LA COMPONENTE DE $\underline{a}$ QUE ACTÚA EN DIR. PERPENDICULAR A $\underline{b}$ EN EL PLANO QUE CONTIENE A AMBOS VECTORES VIENE DADO POR $|\underline{a}|\operatorname{sen}\theta = \frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{|\underline{b}|}$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\underline{c}|}{|\underline{a}|}$ $\therefore |\underline{c}| = |\underline{a}|\operatorname{sen}\theta$

MÁS TRIGONOMETRÍA





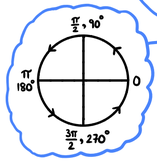
$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \equiv 1$

$\tan\theta \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

RESOLVER ECUACIONES GRÁFICAMENTE

SOLUCIONES

INTERVALO DE SOLUCIONES



RADIANES

GRADOS ⇕ RADIANES



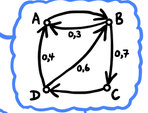
$A = \frac{1}{2}\theta r^2$

$l = r\theta$

θ EN RADIANES

MATRICES Y GRÁFICOS

MATRIZ DE TRANSICIÓN



$T = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0\end{pmatrix}$

PROBABILIDAD DE PASAR DE D A B

Pej. ALGORITMO PAGERANK DE GOOGLE

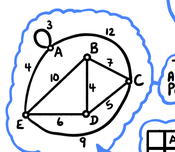


TABLA DE ADYACENCIA PONDERADA

	A	B	C	D	E
A	3	0	12	0	4
B	0	0	7	4	10
C	12	7	0	5	9
D	0	4	5	0	6
E	4	10	9	6	0

Pej. COSTA, TIEMPO, DISTANCIA, etc.

MATRIZ DE ADYACENCIA

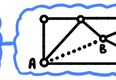
$M = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$ $M^5 = \begin{pmatrix}2&1&1&1\\3&2&2&1\\2&1&1&1\\3&3&2&1\end{pmatrix}$

UNA ARISTA QUE VA DE D A B

3 RECORRIDOS POSIBLES DE LONGITUD 5 DE D A B.
1. DABCDB
2. DBABAB
3. DBCDAB

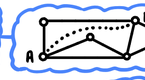
ALGORITMOS CON GRAFOS

PESO DEL CIRCUITO EULERIANO + min $\begin{cases}AB+CD\\AC+BD\\AD+BC\end{cases}$



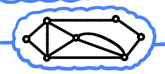
4 'IMPARES' A,B,C,D

PESO DEL CIRCUITO EULERIANO + min AB



2 'IMPARES' A,B

PESO TOTAL DEL CIRCUITO EULERIANO



NINGUNO IMPAR

EL PROBLEMA DEL CARTERO CHINO

ARISTA

LA FORMA MÁS ADECUADA DE PASAR POR CADA

VÉRTICE

EL PROBLEMA DEL VIAJANTE

LÍMITE SUPERIOR

LÍMITE INFERIOR

VÉRTICE BORRADO

VECINO MÁS PRÓXIMO

ALGORITMO DE PRIM

ÁRBOL GENERADOR MINIMAL



ALGORITMO DE KRUSKAL

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

DILATACIÓN VERTICAL DE FACTOR k $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}$

DILATACIÓN HORIZONTAL DE FACTOR k $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k&0\\0&1\end{pmatrix}$

SIMETRÍA RESPECTO A LA RECTA $y = (\tan\alpha)x$ $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha\\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}$

TRASLACIÓN POR EL VECTOR $\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

ROTACIÓN ALREDEDOR DE (0,0) DE UN ÁNGULO θ (SENTIDO CONTRARIO AGUJAS DEL RELOJ) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

ÁREA NUEVA = |A| × ÁREA ANTIGUA

Pej. $P(-2,3)$ ROTAR 90° TRASLADAR 4 HACIA LA DERECHA 3 HACIA ABAJO $P'(?,?)$

$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow P'(1,-5)$

TEORÍA DE GRAFOS

VÉRTICES, ARISTAS, PESOS

GRADO Pej. 3

ARISTAS ADYACENTES

VÉRTICES ADYACENTES

CONEXO – EXISTEN CAMINOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES

SUBGRAFO

SIMPLE

NINGÚN CICLO

ÁRBOLES

A = V − 1

SENDERO EULERIANO

CIRCUITO EULERIANO

EXACTAMENTE DOS VÉRTICES DE GRADO IMPAR

NINGÚN VÉRTICE DE GRADO IMPAR

Pej. K_5

GRAFOS COMPLETOS K_n

$A = \frac{V(V-1)}{2}$

GRAFOS ORIENTADOS

FUERTEMENTE CONEXOS – EXISTEN CAMINOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES EN AMBOS SENTIDOS

GRADO DE ENTRADA = 1

GRADO DE SALIDA = 3

SENDERO

CIRCUITO

TODAS LAS ARISTAS

ARISTAS DISTINTAS

RECORRIDOS

CAMINO

CICLO

VÉRTICES DISTINTOS

TODOS LOS VÉRTICES

HALLAR MEDIANTE INSPECCIÓN

CAMINO HAMILTONIANO

CICLO HAMILTONIANO

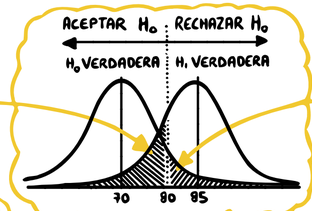
VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

Estadística y probabilidad

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

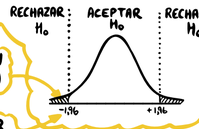
MÁS CONTRASTES DE HIPÓTESIS

P(ERROR DE TIPO II) = P(ACEPTAR H_0 / H_1 VERDADERA) = P($X \leq 80$ / $\mu = 85$)
[SE DARÁ UN NUEVO VALOR DEL PARÁMENTO BAJO H_1]



P(ERROR DE TIPO I) = P(RECHAZAR H_0 / H_0 VERDADERA) = P($X \geq 80$ / $\mu = 70$) = NIVEL DE SIGNIFICACIÓN DEL CONTRASTE

Pej. DE DOS COLAS AL 5% (NIVEL DE SIG.)



REGIÓN CRÍTICA
VALOR CRÍTICO

Pej. DE UNA COLA, A UN NIVEL DE SIG. DEL 5%



REGIÓN CRÍTICA
VALOR CRÍTICO

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

POBLACIÓN — TAMAÑO n — σ DESCONOCIDA — CONTRASTAR PARA μ — $\bar{x}$, s^2_{n-1} — MUESTRA

$t_{n-1} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}$

Pej. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$H_0: \mu = 60$
$H_1: \mu \neq 60$
} CONTRASTE DE DOS COLAS
A UN NIVEL DE SIG. DEL 5%

MUESTRA
$\Rightarrow n=10$, $\bar{x}=71,7$
$s_9^2 = 400$

$t_9 = \frac{71,7-60}{\sqrt{\frac{400}{10}}} = 1,85$



$p = 2 \times 0,0487 = 0,0974$
REGIÓN CRÍTICA

$1,85 < 2,26$
ACEPTAR H_0

POBLACIÓN — σ CONOCIDA — CONTRASTAR PARA μ — TAMAÑO n — $\bar{x}$ — MUESTRA

$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Pej. $X \sim N(\mu, 100)$
$H_0: \mu = 800$
$H_1: \mu < 800$
} CONTRASTE DE UNA COLA
A UN NIVEL DE SIG. DEL 5%

MUESTRA
$\Rightarrow n=25$, $\bar{x}=796,2$

$z = \frac{796,2-800}{\sqrt{\frac{100}{25}}} = -1,9$



$-1,9 < -1,645$
RECHAZAR H_0, ACEPTAR H_1

$X \sim Bin(n,p)$

POBLACIÓN — CONTRASTAR PARA p — n INTENTOS — x, $\sqrt{s}$ — MUESTRA

Pej. $X \sim Bin(n,p)$
$H_0: p = 1/6$
$H_1: p > 1/6$
} CONTRASTE DE UNA COLA
A UN NIVEL DE SIG. DEL 5%

MUESTRA
$\Rightarrow n=30$, $x=10$

SUPONER $X \sim Bin(30, 1/6)$
CALCULADORA $\Rightarrow P(x \geq 10) = 0,0197$



$0,0197 \leq 5\%$
RECHAZAR H_0, ACEPTAR H_1

$X \sim Po(\lambda)$

POBLACIÓN — CONTRASTAR PARA λ — x — MUESTRA

Pej. $X \sim Po(\lambda)$
$H_0: \lambda = 5$
$H_1: \lambda > 5$
} CONTRASTE DE UNA COLA
A UN NIVEL DE SIG. DEL 5%

MUESTRA
$\Rightarrow x = 9$

SUPONER $X \sim Po(5)$
CALCULADORA $\Rightarrow P(x \geq 9) = 0,0681$



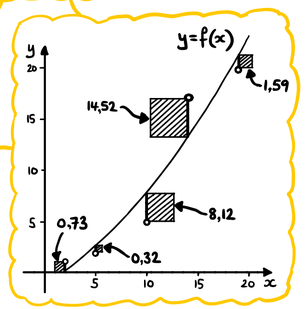
$0,0681 > 5\%$
ACEPTAR H_0

REGRESIÓN NO LINEAL

POTENCIA $f(x) = ax^b$
CÚBICA $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
CUADRÁTICA $f(x) = ax^2 + bx + c$
SENO $f(x) = a\,\text{sen}[b(x+c)] + d$
EXPONENCIAL $f(x) = a \cdot b^x$

CALCULADORA $\Rightarrow$ $a=0,031$, $b=0,591$, $c=-1,16$
$f(x) = 0,031x^2 + 0,591x - 1,16$

x	y	$f(x)$	$y-f(x)$	$[y-f(x)]^2$
2	1	0,15	+0,85	0,73
5	2	2,57	-0,57	0,32
10	5	7,85	-2,85	8,12
14	17	13,19	+3,81	14,52
19	20	21,26	-1,26	1,59



$SS_{RES} = \sum_{i=1}^{5} [y_i - f(x_i)]^2 = 25,3$

CALCULADORA $\Rightarrow R^2 = 0,919$
EL COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN
$R^2 = 1 - \frac{SS_{RES}}{SS_{TOT}}$
LA PROPORCIÓN DE LA VARIABILIDAD DE y QUE SE DEBE A f
$R^2 = 1 \Leftrightarrow SS_{RES} = 0$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

$X \sim Po(\lambda)$
$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$
$E(X) = \lambda$
$Var(X) = \lambda$

$X \sim Po(\lambda_1)$
$Y \sim Po(\lambda_2)$
$\Rightarrow X+Y \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$

INDEPENDIENTES
RITMO PROMEDIO UNIFORME
x SUCESOS
INTERVALO CONTINUO

OBTENCIÓN DE DATOS

FORMAS PARALELAS
DISEÑO DE LA ENCUESTA
CONTENIDO
PRUEBAS DE FIABILIDAD
PRUEBAS DE VALIDEZ
REPETICIÓN DE LA MISMA PRUEBA
ESCOGER DATOS Y VARIABLES PERTINENTES
RELACIONADAS CON LOS CRITERIOS

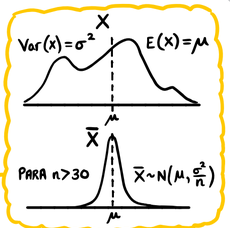
$\bar{x}$ ES UN ESTIMADOR SIN SESGO DE μ

POBLACIÓN — μ σ^2 — $\bar{x}$ s_n^2 — MUESTRA

$s^2_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ ES UN ESTIMADOR SIN SESGO DE σ^2

COMBINACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

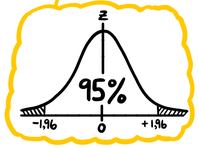
$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$
$E(Y) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \ldots + a_nE(X_n)$
$Var(Y) = a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) + \ldots + a_n^2Var(X_n)$
X_i INDEPENDIENTES



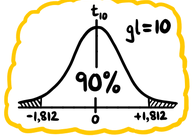
TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

INTERVALOS DE CONFIANZA

$\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\bar{x} - t\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$

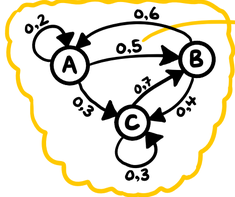


σ CONOCIDA
σ DESCONOCIDA



CADENAS DE MARKOV

ESTADO INICIAL $\Rightarrow \underline{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ SE EMPIEZA EN (A)



$T = \begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0\\0,5 & 0 & 0,7\\0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$

MATRIZ DE TRANSICIÓN

TRAS n MOVIMIENTOS $\Rightarrow \underline{x}_n = T^n\underline{x}_0$

Pej.
TRAS 3 MOVIMIENTOS $\Rightarrow \underline{x}_3 = \begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0\\0,5 & 0 & 0,7\\0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}0,254\\0,415\\0,331\end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix}P(A)\\P(B)\\P(C)\end{matrix}$

ESTADO ESTACIONARIO CUANDO $n \to \infty$ $\Rightarrow T^n\underline{x}_0 \to \begin{pmatrix}0,284\\0,378\\0,338\end{pmatrix}$

ESTADO ESTACIONARIO $\Rightarrow x$T SIN CAMBIOS

$\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0\\0,5 & 0 & 0,7\\0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\Rightarrow 0,2x + 0,6y + 0z = x$
$\Rightarrow 0,5x + 0y + 0,7z = y$
$\Rightarrow 0,3x + 0,4y + 0,3z = z$

$\Rightarrow -0,8x + 0,6y = 0$
$\Rightarrow 0,5x - y + 0,7z = 0$
$\Rightarrow 0,3x + 0,4y - 0,7z = 0$

y $x + y + z = 1$

CALCULADORA
$\Rightarrow x = 0,284$
$y = 0,378$
$z = 0,338$

VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MÁS DERIVACIÓN

SE BOMBEA AIRE EN UN GLOBO ESFÉRICO A UNA VELOCIDAD DE $8\,cm^3/s$. DETERMINAR EL RITMO AL QUE ESTA AUMENTANDO EL RADIO CUANDO EL DIÁMETRO ES 10 cm

ESFERA $\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$

$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{dV}\times\frac{dV}{dt}=\frac{8}{4\pi r^2}$

CUANDO $r=5cm \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{8}{4\pi.5^2}\approx\frac{2}{25\pi}\,cm/s$

RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

MÁXIMO LOCAL $f''(x)\leq 0$

EL PUNTO DE INFLEXIÓN ES EL LUGAR DONDE CAMBIA LA CONCAVIDAD

MÍNIMO LOCAL $f''(x)\geq 0$

CÓNCAVA HACIA ABAJO $f''(x)<0$

CÓNCAVA HACIA ARRIBA $f''(x)>0$

CONCAVIDAD

DERIVADA SEGUNDA $\frac{d^2y}{dx^2}$ O $f''(x)$

P.ej. $y=x^2\operatorname{sen}x$

$\frac{dy}{dx}=x^2\cos x+2x\cdot\operatorname{sen}x$

$y=uv$

$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

REGLA DEL PRODUCTO

P.ej. $y=\operatorname{sen}(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x\cdot\cos(x^2)$ (DERIVACIÓN)

$y=g(u)$, $u=f(x)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

REGLA DE LA CADENA

$y=\frac{u}{v}$

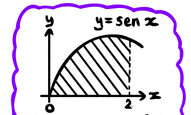
$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

REGLA DEL COCIENTE

$f(x)=x^n$	$\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=e^x$	$\Rightarrow f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x$	$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\operatorname{sen}x$	$\Rightarrow f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$\Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen}x$
$f(x)=\tan x$	$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

P.ej. $y=\frac{\operatorname{sen}x}{x^2}$

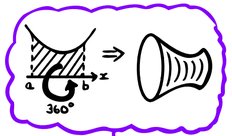
$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\cdot\cos x-2x\cdot\operatorname{sen}x}{x^4}$



ROTAR LA REGIÓN SOMBREADA 360° ALREDEDOR DEL EJE x

$\therefore V=\pi\int_0^2 \operatorname{sen}^2 x\,dx$

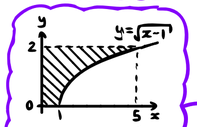
$=3,74$ unidades^3



360° ALREDEDOR DEL EJE x

VOLUMEN $=\int_a^b \pi y^2\,dx$

VOLUMEN DE REVOLUCIÓN



ROTAR LA REGIÓN SOMBREADA 360° ALREDEDOR DEL EJE y

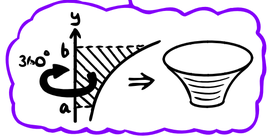
$y=\sqrt{x-1} \Rightarrow y^2+1=x$

$\therefore V=\int_0^2 \pi(y^2+1)^2\,dy$

$=43,14$ unidades^3

360° ALREDEDOR DEL EJE y

VOLUMEN $=\int_a^b \pi y^2\,dx$



$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c, n\neq -1$

$\int e^x dx=e^x+c$

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

$\int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+c$

$\int \cos x\,dx=\operatorname{sen}x+c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$

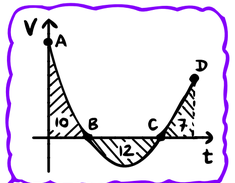
CINEMÁTICA

CELERIDAD $=|v|$

$\frac{d}{dt}$ S = DESPLAZAMIENTO, $\int dt$

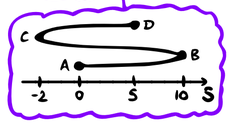
v = VELOCIDAD

$\frac{d}{dt}$ a = ACELERACIÓN, $\int dt$



DESPLAZAMIENTO DE A A D $=\int v\,dt=10-12+7=5m$

DIST. HA VIJADO DE A A D $=\int |v|\,dt=10+12+7=29m$



ECUACIONES DIFERENCIALES

VARIABLES SEPARABLES $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

SEPARAR E INTEGRAR $\int \frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$

EL CRECIMIENTO DE UN ALGA G EN EL INSTANTE t ES PROPORCIONAL A $\sqrt{G}$. INICIALMENTE LAS ALGAS CUBREN $9m^2$ DE LA SUPERFICIE DE UN ESTANQUE Y 4 DÍAS DESPUÉS AUMENTA HASTA LOS $25m^2$. ¿CUÁL ES EL ÁREA CUBIERTA POR LAS ALGAS TRAS 1 SEMANA?

$\frac{dG}{dt}=k\sqrt{G} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{G}}dG=\int k\,dt$

$\therefore 2G^{1/2}=kt+c$

$t=0, G=9 \Rightarrow c=6$

$\therefore 2G^{1/2}=kt+6$

$t=4, G=25 \Rightarrow k=1$

$\therefore G=\left(\frac{t+6}{2}\right)^2$

$t=7 \Rightarrow G=\left(\frac{7+6}{2}\right)^2=42,25m^2$

$\frac{dy}{dx}=3y$ Y $y=2$ CUANDO $x=0$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy=\int 3dx$

$\Rightarrow \ln|y|=3x+c$

$\Rightarrow y=e^{3x+c}=e^{3x}.e^c=Ae^{3x}$

$(0,2) \Rightarrow 2=Ae^{3(0)} \Rightarrow A=2$

$\therefore y=2e^{3x}$

REGLA DE LA CADENA INVERSA

DE LA FORMA $\int g'(x)f(g(x))dx$

$\int 2x(x^2+1)^4dx=\frac{1}{5}(x^2+1)^5+c$

SUSTITUIR $x\rightarrow ax+b$

$\int e^{3x+2}dx=\frac{1}{3}e^{3x+2}+c$

$\int \cos(2x-1)dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x-1)+c$

INTEGRALES DEFINIDAS PARA HALLAR EL ÁREA

$\int_a^b g'(x)dx=g(b)-g(a)$

$\int_3^5 x^2-3x\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^5$

$=\left(\frac{125}{3}-\frac{75}{2}\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)$

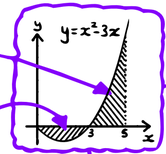
$=8\frac{2}{3}$

$\int_0^3 x^2-3x\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$

$=\left(9-\frac{27}{2}\right)-(0)$

$=-4\frac{1}{2}$



ÁREA TOTAL SOMBREADA $=4\frac{1}{2}+8\frac{2}{3}=13\frac{1}{6}$ unidades^2

MÁS INTEGRACIÓN

$\frac{dy}{dx}=ay+b$, CUANDO $x=0, y=1$

USANDO $h=0,2$ ESTIMAR y CUANDO $x=1$

n	x_n	$y_n \Rightarrow$ CALCULADORA $\Rightarrow 0,2\rightarrow h$
0	0	= 1
1	0,2	= ANS + h(0 + ANS) = 1,2
2	0,4	= ANS + h(0.2 + ANS) = 1,48
3	0,6	= ANS + h(0.4 + ANS) = 1,856
4	0,8	= ANS + h(0.6 + ANS) = 2,347
5	1	= ANS + h(0.8 + ANS) = 2,977

$x_5=1$, $y_5=2,977$

$\frac{dx}{dt}=3x-y$, $\frac{dy}{dt}=x+y+t$. CUANDO $t=0, x=2, y=1$

USANDO UN PASO $h=\frac{1}{4}$, ESTIMAR EL VALOR DE x E y CUANDO $t=1$

t	x	y
0	$x_0=2$	$y_0=1$
0,25	$x_1=2+(3\times2-1)(\frac{1}{4})=3,25$	$y_1=1+(2+1+0)(\frac{1}{4})=1,75$
0,5	$x_2=3,25+(3\times3,25-1,75)(\frac{1}{4})=5,25$	$y_2=1,75+(3,25+1,75+0,25)(\frac{1}{4})=3,063$
0,75	$x_3=5,25+(3\times5,25-3,063)(\frac{1}{4})=8,422$	$y_3=3,063+(5,25+3,063+0,5)(\frac{1}{4})=5,266$
1	$x_4=8,422+(3\times8,422-5,266)(\frac{1}{4})=13,422$	$y_4=5,266+(8,422+5,266+0,75)(\frac{1}{4})=8,875$

$\therefore$ PARA $t=1 \Rightarrow x=13,422$, $y=8,875$

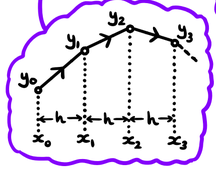
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

$x_{n+1}=x_n+h$

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

PRIMER ORDEN

MÉTODO DE EULER



SOLUCIONES NUMÉRICAS

$\frac{dx}{dt}=f_1(x,y,t)$

$\frac{dy}{dt}=f_2(x,y,t)$

$x_{n+1}=x_n+f_1(x_n,y_n,t_n)h$

$y_{n+1}=y_n+f_2(x_n,y_n,t_n)h$

SISTEMA ACOPLADO

SEGUNDO ORDEN

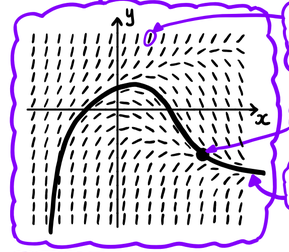
$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,\frac{dx}{dt},t)$

SEA $y=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$

AHORA RESOLVEMOS $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=f(x,y,t)\end{cases}$

CAMPOS DE DIRECCIONES

P.ej. $\frac{dy}{dx}=y^2-x$



EN $(1,2)$ $\frac{dy}{dx}=2^2-1=3$

RESTRICCIÓN

CURVA DE SOLUCIONES

ECUACIONES DIFERENCIALES

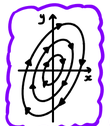
$\frac{dx}{dt}=ax+by$

$\frac{dy}{dt}=cx+dy$

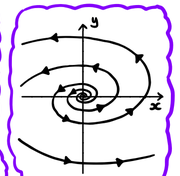
$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{x}'=A\underline{x}$

HALLAR LOS VALORES PROPIOS DE $A \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$



EL RETRATO DE FASE ES UN CÍRCULO O UNA ELIPSE



EL RETRATO DE FASE ES UNA ESPIRAL

IMAGINARIOS λ_1 Y λ_2

COMPLEJO λ_1 Y λ_2

PARTE REAL DE λ_1 Y λ_2 ES NEGATIVA

PARTE REAL DE λ_1 Y λ_2 ES POSITIVA

LAS SOLUCIONES SE MUEVEN ACERCÁNDOSE AL ORIGEN

LAS SOLUCIONES SE ALEJAN DEL ORIGEN

REAL CON $\lambda_1=+$ Y $\lambda_2=-$

EL RETRATO DE FASE ES UNA SILLA DE MONTAR

INVESTIGAR EL RETRATO DE FASE $\frac{dx}{dt}=x+2y$, $\frac{dy}{dt}=3x+2y$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\lambda^2-3\lambda-4=0$

$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$

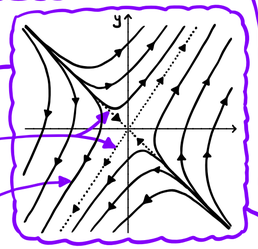
$\lambda_1=4, \lambda_2=-1$

VECTORES PROPIOS

$\lambda_1=4 \Rightarrow \underline{x}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-1 \Rightarrow \underline{x}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

SIGNOS DIFERENTES $\Rightarrow$ LAS SOLUCIONES SE ALEJAN DEL ORIGEN



VOLVER AL MENÚ PRINCIPAL