



International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur et moyen

Spécimens des épreuves 1, 2 et 3

Premiers examens en 2021

TABLE DES MATIÈRES

**Mathématiques : analyse et approches niveau supérieur
épreuve 1 spécimen d'épreuve**

**Mathématiques : analyse et approches niveau supérieur
épreuve 1 barème de notation**

**Mathématiques : analyse et approches niveau supérieur
épreuve 2 spécimen d'épreuve**

**Mathématiques : analyse et approches niveau supérieur
épreuve 2 barème de notation**

**Mathématiques : analyse et approches niveau supérieur
épreuve 3 spécimen d'épreuve**

**Mathématiques : analyse et approches niveau supérieur
épreuve 3 barème de notation**

**Mathématiques : analyse et approches niveau moyen
épreuve 1 spécimen d'épreuve**

**Mathématiques : analyse et approches niveau moyen
épreuve 1 barème de notation**

**Mathématiques : analyse et approches niveau moyen
épreuve 2 spécimen d'épreuve**

**Mathématiques : analyse et approches niveau moyen
épreuve 2 barème de notation**

**Mathématiques : analyse et approches**
Niveau supérieur
Épreuve 1

Spécimen d'épreuve

Numéro de session du candidat

2 heures

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.



Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Soit A et B des événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,6$.
Trouvez $P(A | B)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Note maximale : 5]

(a) Montrez que $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, où $n \in \mathbb{Z}$. [2]

(b) À partir de là, ou par toute autre méthode, prouvez que la somme des carrés de deux entiers impairs consécutifs est paire. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Note maximale : 5]

Soit $f'(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Étant donné que $f(0) = 5$, trouvez $f(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

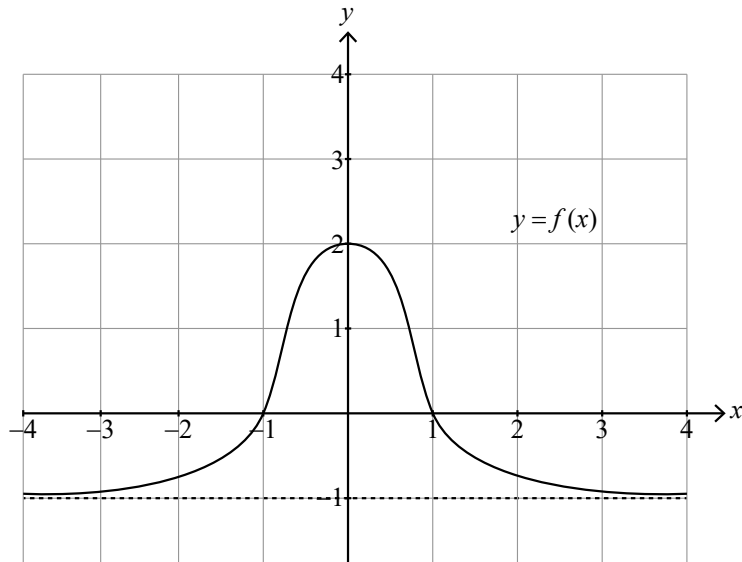
.....

.....

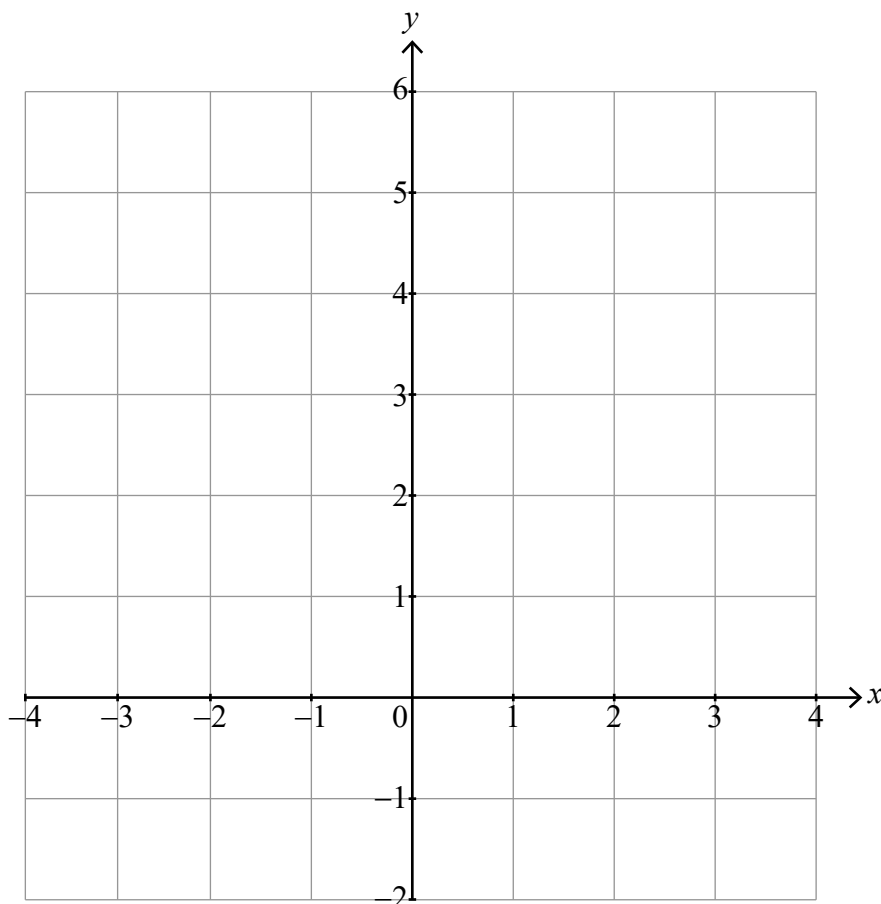


4. [Note maximale : 5]

Le diagramme suivant montre la représentation graphique de $y = f(x)$. La représentation graphique a une asymptote horizontale en $y = -1$. La représentation graphique croise l'axe des abscisses en $x = -1$ et en $x = 1$, et l'axe des ordonnées en $y = 2$.



Sur le système d'axes suivant, esquissez la représentation graphique de $y = [f(x)]^2 + 1$, en montrant clairement toute asymptote avec son équation ainsi que les coordonnées de tout maximum ou minimum relatif.



5. [Note maximale : 5]

Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = \frac{x+3}{4}$ et $g(x) = 8x+5$.

(a) Montrez que $(g \circ f)(x) = 2x + 11$. [2]

(b) Étant donné que $(g \circ f)^{-1}(a) = 4$, trouvez la valeur de a . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Note maximale : 8]

(a) Montrez que $\log_9(\cos 2x + 2) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$. [3]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, résolvez $\log_3(2 \sin x) = \log_9(\cos 2x + 2)$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [5]

[illegible]

7. [Note maximale : 7]

Une variable aléatoire continue X a fonction de densité de probabilité f , donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{36} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right), & 0 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}.$$

Trouvez $P(0 \leq X \leq 3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Note maximale : 7]

L'équation cartésienne du plan Π est $2x + y + 2z = 3$.

L'équation vectorielle de la droite L est $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ p \end{pmatrix}$, $\mu, p \in \mathbb{R}$. L'angle aigu entre la droite L et le plan Π est de 30° .

Trouvez les valeurs possibles de p .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

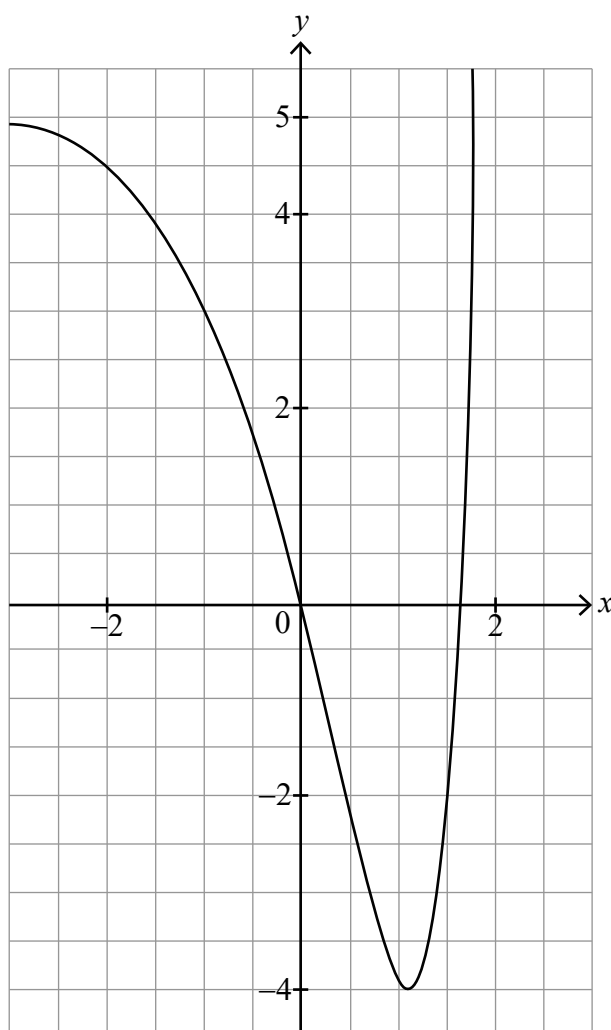
.....

.....



9. [Note maximale : 8]

La fonction f est définie par $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, $x \leq a$. La représentation graphique de $y = f(x)$ est montrée dans le diagramme suivant.



- (a) Trouvez la plus grande valeur de a telle que f possède une fonction réciproque. [3]
- (b) Pour cette valeur de a , trouvez une expression pour $f^{-1}(x)$, en indiquant son domaine. [5]

(Suite de la question à la page suivante)



(Suite de la question 9)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP11

Tournez la page

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 16]

Soit $f(x) = \frac{\ln 5x}{kx}$ où $x > 0$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Montrez que $f'(x) = \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$. [3]

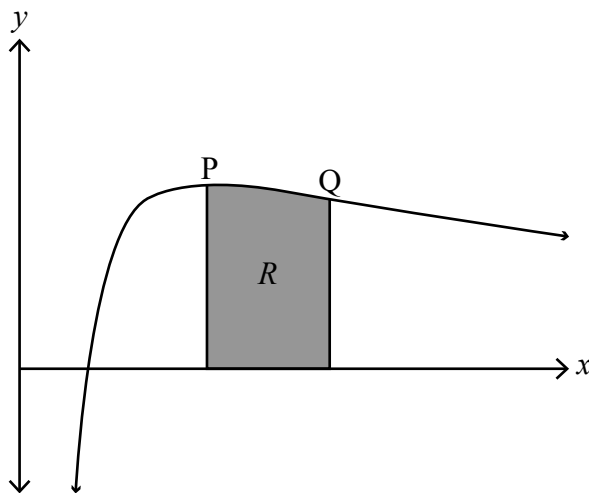
La représentation graphique de f a exactement un maximum au point P.

(b) Trouvez l'abscisse de P. [3]

La dérivée seconde de f est donnée par $f''(x) = \frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3}$. La représentation graphique de f a exactement un point d'inflexion Q.

(c) Montrez que l'abscisse de Q est $\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}$. [3]

La région R est délimitée par la représentation graphique de f , l'axe des abscisses et les droites verticales passant par le point maximum P et le point d'inflexion Q.



(d) Étant donné que l'aire de R est 3, trouvez la valeur de k . [7]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 18]

- (a) Exprimez $-3 + \sqrt{3}i$ sous la forme $re^{i\theta}$, où $r > 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$. [5]

Soit u , v et w les racines de l'équation $z^3 = -3 + \sqrt{3}i$.

- (b) Trouvez u , v et w , en exprimant vos réponses sous la forme $re^{i\theta}$, où $r > 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$. [5]

Sur le diagramme d'Argand, u , v et w sont représentées par les points U, V et W respectivement.

- (c) Trouvez l'aire du triangle UVW. [4]

- (d) En considérant la somme des racines u , v et w , montrez que $\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{7\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} = 0$. [4]

12. [Note maximale : 21]

La fonction f est définie par $f(x) = e^{\sin x}$.

- (a) Trouvez les deux premières dérivées de $f(x)$ et à partir de là, trouvez la série de Maclaurin pour $f(x)$ jusqu'au terme contenant x^2 inclusivement. [8]

- (b) Montrez que le coefficient de x^3 dans la série de Maclaurin pour $f(x)$ est zéro. [4]

- (c) En utilisant les séries de Maclaurin pour $\arctan x$ et $e^{3x} - 1$, trouvez la série de Maclaurin pour $\arctan(e^{3x} - 1)$ jusqu'au terme contenant x^3 inclusivement. [6]

- (d) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\arctan(e^{3x} - 1)}$. [3]



Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne
seront pas corrigées.



16EP14

Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne
seront pas corrigées.



Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne
seront pas corrigées.



16EP16

Barème de notation

Spécimen d'épreuve

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur

Épreuve 1

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

*Attribuez des points à l'aide des annotations tel qu'indiqué dans le barème de notation, par exemple **M1**, **A2**.*

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- En règle générale, il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **A1**, étant donné que les points **A** dépendent des éventuels points **M** qui précèdent.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, par exemple **M1A1**, cela signifie habituellement **M1** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple, substitution dans une formule) et **A1** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Si deux points **A** ou plus sont marqués sur la même ligne, ils peuvent être attribués de façon indépendante ; par exemple, si la première valeur est incorrecte, mais que les deux suivantes sont correctes, attribuez **A0A1A1**.
- Lorsque le barème de notation précise **M2**, **A2**, etc., **ne fractionnez pas** ces points (sauf indication contraire dans une remarque).
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit. Cependant, si le raisonnement qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier **A1**. Les réponses numériques peuvent néanmoins être une exception, dans le cas où une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Par contre, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une partie ultérieure et que le raisonnement montré est correct, attribuez des points de suivi **FT**, mais n'attribuez pas le dernier **A1** dans cette partie.

Exemples :

	Réponse correcte vue	Raisonnement additionnel vu	Action
1.	$8\sqrt{2}$	5,656 85... (valeur décimale incorrecte)	Attribuer le dernier A1 (ignorer le raisonnement additionnel)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	Ne pas attribuer le dernier A1
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	Ne pas attribuer le dernier A1

3 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses, par exemple (M1)**, et peuvent seulement être attribués si un raisonnement **correct** est vu ou si ce dernier est implicite dans le raisonnement subséquent.

- Normalement, le raisonnement correct est vu ou implicite dans la prochaine ligne de la démarche.
- Des points **sans** parenthèses ne peuvent être attribués que pour un raisonnement qui est **vu**.

4 Points de suivi (attribués uniquement suite à une erreur du candidat)

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes** ou sous-partie(s). En règle générale, pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente**. Cependant, si une sous-partie se voit attribuer des points uniquement pour la réponse (c'est-à-dire qu'aucun raisonnement n'est indiqué), alors des points **FT** doivent être attribués le cas échéant.

- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une **erreur** est commise, aucun autre point **A** ne peut être attribué au travail faisant intervenir l'erreur, mais des points **M** peuvent être attribués, le cas échéant.
- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, utilisation de $r > 1$ pour la somme d'une série géométrique infinie, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Le mot « leur » peut apparaître dans une description du barème de notation afin d'indiquer la possibilité que les candidats utilisent une valeur incorrecte.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.
- Si un candidat commet une erreur dans une partie, mais obtient une ou des réponses correctes dans la ou les parties suivantes, attribuez les points appropriés, sauf indication contraire dans la question. Une approche différente ne dépendant pas des réponses aux parties précédentes peut souvent être utilisée dans les parties suivantes.

5 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquez une pénalité **MR** de 1 point pour cette question.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Si un candidat copie incorrectement son propre travail, cela ne constitue **pas** une erreur de lecture, il s'agit d'une erreur.
- La pénalité **MR** ne peut être appliquée que lorsque le raisonnement est vu. Pour les questions avec la calculatrice, sans raisonnement et avec des réponses incorrectes, les examinateurs ne doivent **pas** présumer que les valeurs ont été mal lues.

6 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **SOIT . . . OU**.

7 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens), apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

8 Précision des réponses

Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera attribué si la réponse est fournie avec le niveau de précision requis. Il y a deux types d'erreurs de précision et le point pour la réponse finale ne doit pas être attribué si ces erreurs surviennent.

- **Erreurs d'arrondi** : concerne uniquement les réponses finales, pas les étapes intermédiaires.
- **Niveau de précision** : lorsque cela n'est pas spécifié dans la question, la règle générale s'applique aux réponses finales : *sauf en cas d'indication contraire contenue dans la question, les candidats doivent toujours fournir des réponses numériques exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.*

9 Calculatrices

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée. L'utilisation d'une calculatrice pour l'épreuve 1 est une mauvaise pratique, et aucun point ne sera accordé. Si vous voyez des parties de travail qui laissent croire qu'un candidat à utiliser une calculatrice, suivez la procédure en cas de mauvaise pratique. Exemple : trouver un rapport trigonométrique de 0,423 5.

Section A

1. tenter de substituer dans $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (M1)

Note : Accepter l'utilisation d'un diagramme de Venn ou toute autre méthode valide.

$$0,6 = 0,5 + 0,4 - P(A \cap B) \quad (A1)$$

$$P(A \cap B) = 0,3 \text{ (vu n'importe où)} \quad A1$$

$$\text{tenter de substituer dans } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (M1)$$

$$= \frac{0,3}{0,4}$$

$$P(A|B) = 0,75 \left(= \frac{3}{4} \right) \quad A1$$

Total [5 points]

2. (a) tenter de développer le membre de gauche (M1)

$$\text{MEMBRE DE GAUCHE} = (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) \quad A1$$

$$= 8n^2 + 2 (= \text{MEMBRE DE DROITE}) \quad AG$$

[2 points]

- (b) **MÉTHODE 1**

reconnaître que $2n - 1$ et $2n + 1$ représentent deux entiers impairs consécutifs (pour tous les entiers impairs n) R1

$$8n^2 + 2 = 2(4n^2 + 1) \quad A1$$

raison valide, *par exemple*, divisible par 2 (2 est un facteur) R1

la somme des carrés de deux entiers impairs consécutifs est donc paire AG

[3 points]

MÉTHODE 2

reconnaître, *par exemple*, que n et $n + 2$ représentent deux entiers impairs consécutifs (pour $n \in \mathbb{Z}$) R1

$$n^2 + (n + 2)^2 = 2(n^2 + 2n + 2) \quad A1$$

raison valide, *par exemple*, divisible par 2 (2 est un facteur) R1

la somme des carrés de deux entiers impairs consécutifs est donc paire AG

[3 points]

Total [5 points]

3. tenter d'intégrer (M1)

$$u = 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x$$

$$\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}} du \quad (A1)$$

SOIT

$$= 4\sqrt{u} (+C) \quad A1$$

OU

$$= 4\sqrt{2x^2 + 1} (+C) \quad A1$$

ALORS

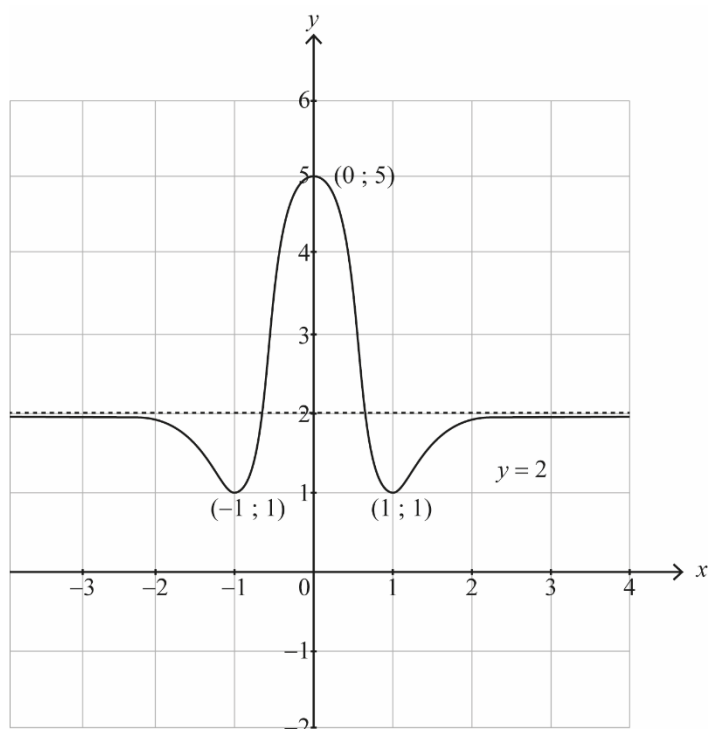
substitution correcte dans leur primitive (C doit apparaître) (M1)

$$5 = 4 + C \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = 4\sqrt{2x^2 + 1} + 1 \quad A1$$

Total [5 points]

4.



pas de valeur de y inférieure à 1

A1

l'asymptote horizontale est $y = 2$ avec une courbe qui s'approche par en-dessous

A1

lorsque $x \rightarrow \pm\infty$

A1

$(\pm 1 ; 1)$ minimums relatifs

A1

$(0 ; 5)$ maximum relatif

A1

courbe lisse et points stationnaires lisses

Total [5 points]

5. (a) tenter de former la composition

M1

substitution correcte $g\left(\frac{x+3}{4}\right) = 8\left(\frac{x+3}{4}\right) + 5$

A1

$(g \circ f)(x) = 2x + 11$

AG

[2 points]

(b) tenter de substituer 4 (vu n'importe où)

(M1)

équation correcte $a = 2 \times 4 + 11$

(A1)

$a = 19$

A1

[3 points]

Total [5 points]

6. (a) tenter d'utiliser la règle de changement de base

$$\log_9(\cos 2x + 2) = \frac{\log_3(\cos 2x + 2)}{\log_3 9}$$

$$= \frac{1}{2} \log_3(\cos 2x + 2)$$

$$= \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$$

M1

A1

A1

AG

[3 points]

(b) $\log_3(2 \sin x) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$

$$2 \sin x = \sqrt{\cos 2x + 2}$$

$$4 \sin^2 x = \cos 2x + 2 \text{ (ou l'équivalent)}$$

utiliser $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$$6 \sin^2 x = 3$$

$$\sin x = (\pm) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

M1

A1

(M1)

A1

A1

Note : Attribuer **A0** si d'autres solutions que $x = \frac{\pi}{4}$ sont données.

[5 points]

Total [8 points]

7. tenter d'intégrer par parties, *par exemple*,

$$u = \frac{\pi x}{36}, du = \frac{\pi}{36} dx, dv = \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx, v = -\frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \quad (M1)$$

$$P(0 \leq X \leq 3) = \frac{\pi}{36} \left(\left[-\frac{6x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^3 + \frac{6}{\pi} \int_0^3 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx \right) \text{ (ou l'équivalent)} \quad A1A1$$

Note : Attribuer **A1** pour $\mathcal{W}$ correct et **A1** $\int v du$ correct.

tenter de substituer les bornes **M1**

$$\frac{\pi}{36} \left[-\frac{6x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^3 = 0 \quad (A1)$$

$$\text{donc } P(0 \leq X \leq 3) = \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^3 \text{ (ou l'équivalent)} \quad A1$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad A1$$

Total [7 points]

8. reconnaître que l'angle entre la normale et la droite est de 60° (vu n'importe où)
tenter d'utiliser la formule du produit scalaire

R1

M1

$$\cos 60^\circ = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ p \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9} \times \sqrt{1+4+p^2}} \quad A1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|2p|}{3\sqrt{5+p^2}} \quad A1$$

$$3\sqrt{5+p^2} = 4|p|$$

tenter d'élever chaque membre au carré **M1**

$$9(5+p^2) = 16p^2 \Rightarrow 7p^2 = 45$$

$$p = \pm 3\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ (ou l'équivalent)} \quad A1A1$$

Total [7 points]

9. (a) tenter de dériver et poser la dérivée égale à zéro

M1

$$f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3) = 0$$

A1

minimum en $x = \ln 3$

$$a = \ln 3$$

A1

[3 points]

- (b) **Note :** Le fait d'interchanger x et y peut être effectué à n'importe quelle étape.

$$y = (e^x - 3)^2 - 4$$

(M1)

$$e^x - 3 = \pm\sqrt{y+4}$$

A1

puisque $x \leq \ln 3$, $x = \ln(3 - \sqrt{y+4})$

R1

donc $f^{-1}(x) = \ln(3 - \sqrt{x+4})$

A1

le domaine de f^{-1} est $x \in \mathbb{R}, -4 \leq x < 5$

A1

[5 points]

Total [8 points]

Section B

10. (a) tenter d'utiliser la règle du quotient
substitution correcte dans la règle du quotient

(M1)

$$f'(x) = \frac{5kx \left(\frac{1}{5x} \right) - k \ln 5x}{(kx)^2} \quad (\text{ou l'équivalent})$$

A1

$$= \frac{k - k \ln 5x}{k^2 x^2}, (k \in \mathbb{R}^+)$$

A1

$$= \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$$

AG

[3 points]

- (b) $f'(x) = 0$

M1

$$\frac{1 - \ln 5x}{kx^2} = 0$$

$$\ln 5x = 1$$

(A1)

$$x = \frac{e}{5}$$

A1

[3 points]

- (c) $f''(x) = 0$

M1

$$\frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3} = 0$$

$$\ln 5x = \frac{3}{2}$$

A1

$$5x = e^{\frac{3}{2}}$$

A1

le point d'inflexion est donc situé en $x = \frac{1}{5} e^{\frac{3}{2}}$

AG

[3 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 10

(d) tenter d'intégrer (M1)

$$u = \ln 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln 5x}{kx} dx = \frac{1}{k} \int u \, du \quad \text{(A1)}$$

SOIT

$$= \frac{u^2}{2k} \quad \text{A1}$$

$$\text{donc } \frac{1}{k} \int_1^{\frac{3}{2}} u \, du = \left[\frac{u^2}{2k} \right]_1^{\frac{3}{2}} \quad \text{A1}$$

OU

$$= \frac{(\ln 5x)^2}{2k} \quad \text{A1}$$

$$\text{donc } \int_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \frac{\ln 5x}{kx} dx = \left[\frac{(\ln 5x)^2}{2k} \right]_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \quad \text{A1}$$

ALORS

$$= \frac{1}{2k} \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{5}{8k} \quad \text{A1}$$

poser leur expression pour l'aire égale à 3 M1

$$\frac{5}{8k} = 3$$

$$k = \frac{5}{24} \quad \text{A1}$$

[7 points]

Total [16 points]

11. (a) tenter de trouver le module **(M1)**

$$r = 2\sqrt{3} (= \sqrt{12}) \quad \text{A1}$$

- tenter de trouver l'argument dans le bon quadrant **(M1)**

$$\theta = \pi + \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{A1}$$

$$= \frac{5\pi}{6} \quad \text{A1}$$

$$-3 + \sqrt{3}i = \sqrt{12}e^{\frac{5\pi i}{6}} \left(= 2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi i}{6}} \right)$$

[5 points]

- (b) tenter de trouver une racine en utilisant le théorème de De Moivre **M1**

$$12^{\frac{1}{6}} e^{\frac{5\pi i}{18}} \quad \text{A1}$$

- tenter de trouver les deux autres racines en additionnant et en soustrayant

$$\frac{2\pi}{3} \text{ à l'argument} \quad \text{M1}$$

$$12^{\frac{1}{6}} e^{\frac{7\pi i}{18}} \quad \text{A1}$$

$$12^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17\pi i}{18}} \quad \text{A1}$$

Note : Ignorer la façon d'identifier u , v et w à ce stade.

[5 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 11

(c) **MÉTHODE 1**

tenter de trouver l'aire totale des triangles (congrus) UOV, VOW
et UOW

M1

$$\text{Aire} = 3 \left(\frac{1}{2} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \sin \frac{2\pi}{3}$$

A1A1

Note : Attribuer **A1** pour $\left(12^{\frac{1}{6}} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right)$ et **A1** pour $\sin \frac{2\pi}{3}$.

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(12^{\frac{1}{3}} \right) \text{ (ou l'équivalent)}$$

A1

[4 points]

MÉTHODE 2

$$UV^2 = \left(12^{\frac{1}{6}} \right)^2 + \left(12^{\frac{1}{6}} \right)^2 - 2 \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \cos \frac{2\pi}{3} \text{ (ou l'équivalent)}$$

A1

$$UV = \sqrt{3} \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \text{ (ou l'équivalent)}$$

A1

tenter de trouver l'aire de UVW en utilisant $\text{Aire} = \frac{1}{2} \times UV \times VW \times \sin \alpha$

par exemple

M1

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \times 12^{\frac{1}{6}} \right) \left(\sqrt{3} \times 12^{\frac{1}{6}} \right) \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(12^{\frac{1}{3}} \right) \text{ (ou l'équivalent)}$$

A1

[4 points]

(d) $u + v + w = 0$

R1

$$12^{\frac{1}{6}} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{18} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{18} \right) + \cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right) = 0$$

A1

considérer les parties réelles

M1

$$12^{\frac{1}{6}} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{18} \right) + \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} \right) = 0$$

$$\cos \left(-\frac{7\pi}{18} \right) = \cos \frac{7\pi}{18} \text{ indiqué explicitement}$$

A1

$$\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{7\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} = 0$$

AG

[4 points]

Total [18 points]

12. (a) tenter d'utiliser la règle de dérivation en chaîne pour trouver la première dérivée **M1**

$$f'(x) = (\cos x) e^{\sin x}$$
 A1
 tenter d'utiliser la règle de dérivation d'un produit en chaîne pour trouver la dérivée seconde **M1**

$$f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$$
 (ou l'équivalent) **A1**
 tenter de trouver $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ **M1**

$$f(0) = 1; f'(0) = (\cos 0) e^{\sin 0} = 1; f''(0) = e^{\sin 0} (\cos^2 0 - \sin 0) = 1$$
 A1
 substitution dans la formule de Maclaurin $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$ **M1**
 la série de Maclaurin pour $f(x)$ jusqu'au terme en x^2 inclusivement est
 donc $1 + x + \frac{x^2}{2}$ **A1**

[8 points]

(b) **MÉTHODE 1**

- tenter de dériver $f''(x)$ **M1**

$$f'''(x) = (\cos x) e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) - (\cos x) e^{\sin x} (2 \sin x + 1)$$
 (ou l'équivalent) **A2**
 substituer $x = 0$ dans **leur** $f'''(x)$ **M1**

$$f'''(0) = 1(1 - 0) - 1(0 + 1) = 0$$

 le coefficient de x^3 dans la série de Maclaurin pour $f(x)$ est donc zéro **AG**

MÉTHODE 2

- substituer $\sin x$ dans la série de Maclaurin pour e^x **(M1)**

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots$$

 substituer la série de Maclaurin pour $\sin x$ **M1**

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^3}{3!} + \dots$$
 A1
 le coefficient de x^3 est $-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = 0$ **A1**
 le coefficient de x^3 dans la série de Maclaurin pour $f(x)$ est donc zéro **AG**

[4 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 12

- (c) substituer $3x$ dans la série de Maclaurin pour e^x

M1

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots$$

A1

substituer $(e^{3x} - 1)$ dans la série de Maclaurin pour $\arctan x$

M1

$$\begin{aligned} \arctan(e^{3x} - 1) &= (e^{3x} - 1) - \frac{(e^{3x} - 1)^3}{3} + \frac{(e^{3x} - 1)^5}{5} - \dots \\ &= \left(3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots \right) - \frac{\left(3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots \right)^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

A1

choisir les bons termes à partir du résultat ci-dessus

M1

$$\begin{aligned} &= \left(3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} \right) - \frac{(3x)^3}{3} \\ &= 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{9x^3}{2} \end{aligned}$$

A1

[6 points]

- (d) **MÉTHODE 1**

substituer leur série

M1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \dots}{3x + \frac{9x^2}{2} + \dots}$$

A1

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} + \dots}{3 + \frac{9x}{2} + \dots}$$

$$= \frac{1}{3}$$

A1

MÉTHODE 2

utiliser la règle de L'Hôpital

M1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x) e^{\sin x}}{3e^{3x}} \quad (\text{ou l'équivalent})$$

A1

$$1 + (e^{3x} - 1)^2$$

$$= \frac{1}{3}$$

A1

[3 points]

Total [21 points]

**Mathématiques : analyse et approches**
Niveau supérieur
Épreuve 2

Spécimen d'épreuve

Numéro de session du candidat

2 heures

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instructions to candidates

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.



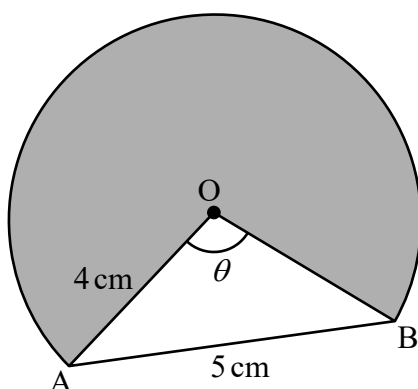
Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre une partie d'un cercle de centre O et de rayon égal à 4 cm.



La corde AB a une longueur de 5 cm et $\widehat{AOB} = \theta$.

- (a) Trouvez la valeur de θ , en donnant votre réponse en radians. [3]
- (b) Trouvez l'aire de la région ombragée. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Note maximale : 6]

Le 1^{er} janvier 2020, Laurie investit $P\$$ dans un compte qui rapporte un taux d'intérêt annuel nominal de 5,5 %, composé **trimestriellement**.

Le montant d'argent dans le compte de Laurie **à la fin de chaque année** suit une suite géométrique de raison r .

(a) Trouvez la valeur de r , en donnant votre réponse avec quatre chiffres significatifs. [3]

Laurie n'effectue aucun autre dépôt dans le compte ni aucun autre retrait.

(b) Trouvez en quelle année le montant d'argent dans le compte de Laurie sera égal au double du montant qu'elle a investi. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Note maximale : 6]

Un dé biaisé à six faces est pondéré de telle sorte que la probabilité d'obtenir un « six » est de $\frac{7}{10}$.

Le dé est lancé cinq fois. Trouvez la probabilité d'obtenir

(a) au plus trois « six ». [3]

(b) le troisième « six » au cinquième lancer. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Note maximale : 7]

Le tableau suivant montre les notes obtenues par sept élèves à deux examens de mathématiques différents.

Examen 1 (x)	15	23	25	30	34	34	40
Examen 2 (y)	20	26	27	32	35	37	35

Soit L_1 la droite de régression de x sur y . L'équation de la droite L_1 peut s'écrire sous la forme $x = ay + b$.

(a) Trouvez la valeur de a et la valeur de b . [2]

Soit L_2 la droite de régression de y sur x . Les droites L_1 et L_2 passent par le même point ayant pour coordonnées $(p; q)$.

(b) Trouvez la valeur de p et la valeur de q . [3]

(c) Jennifer était absente lors du premier examen, mais elle a obtenu une note de 29 points au deuxième examen. Utilisez une équation de régression appropriée pour estimer la note de Jennifer au premier examen. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Note maximale : 7]

Le déplacement, en centimètres, d'une particule à partir d'une origine, O, au temps t secondes, est donné par $s(t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq 5$.

(a) Trouvez la distance maximale de la particule par rapport à O. [3]

(b) Trouvez l'accélération de la particule à l'instant où elle change de direction pour la première fois. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Note maximale : 6]

Dans une ville, le nombre de passagers, X , prenant place dans un taxi suit la distribution de probabilité suivante.

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,60	0,30	0,03	0,05	0,02

Après l'ouverture d'une nouvelle autoroute à péage, une société de taxi introduit une redevance pour les passagers qui utilisent l'autoroute. La redevance est de 2,40\$ par taxi plus 1,20\$ par passager.

Soit T le montant, en dollars, facturé par la société de taxi par trajet.

(a) Trouvez $E(T)$. [4]

(b) Étant donné que $\text{Var}(X) = 0,8419$, trouvez $\text{Var}(T)$. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Note maximale : 5]

Deux bateaux, A et B, sont observés à partir d'une origine O. Leurs vecteurs-position par rapport à O, au temps t heures après midi, sont donnés par

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

où les distances sont mesurées en kilomètres.

Trouvez la distance minimale entre les deux bateaux.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Note maximale : 7]

Les nombres complexes w et z satisfont les équations

$$\frac{w}{z} = 2i$$
$$z^* - 3w = 5 + 5i.$$

Trouvez w et z sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{Z}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Note maximale : 5]

Considérez les représentations graphiques de $y = \frac{x^2}{x-3}$ et de $y = m(x+3)$, $m \in \mathbb{R}$.

Trouvez l'ensemble de valeurs de m pour lesquelles les deux représentations graphiques n'ont aucun point d'intersection.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 15]

La longueur, X mm, d'une certaine espèce de coquillage est distribuée normalement avec une moyenne de 25 et une variance de σ^2 .

La probabilité que X soit inférieure à 24,15 est de 0,1446.

- (a) Trouvez $P(24,15 < X < 25)$. [2]
- (b) (i) Trouvez σ , l'écart type de X .
- (ii) À partir de là, trouvez la probabilité qu'un coquillage choisi au hasard ait une longueur supérieure à 26 mm. [5]

Un échantillon aléatoire de 10 coquillages est recueilli sur une plage. Soit Y , le nombre de coquillages dont la longueur est supérieure à 26 mm.

- (c) Trouvez $E(Y)$. [3]
- (d) Trouvez la probabilité qu'exactly trois de ces coquillages aient une longueur supérieure à 26 mm. [2]

Un coquillage choisi au hasard a une longueur inférieure à 26 mm.

- (e) Trouvez la probabilité que sa longueur soit entre 24,15 mm et 25 mm. [3]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 21]

Un grand réservoir contient initialement de l'eau pure. On commence à verser de l'eau contenant du sel dans le réservoir. La solution est maintenue uniforme par agitation et sort du réservoir par un orifice de sortie à sa base.

Soit x grammes la quantité de sel dans le réservoir et soit t minutes le temps à partir du moment où l'eau salée a commencé à être versée dans le réservoir.

Le taux de variation de la quantité de sel dans le réservoir, $\frac{dx}{dt}$, est décrit par l'équation

différentielle $\frac{dx}{dt} = 10e^{-\frac{t}{4}} - \frac{x}{t+1}$.

(a) Montrez que $t+1$ est un facteur intégrant pour cette équation différentielle. [2]

(b) À partir de là, en résolvant cette équation différentielle, montrez que

$$x(t) = \frac{200 - 40e^{-\frac{t}{4}}(t+5)}{t+1}. \quad [8]$$

(c) Esquissez la représentation graphique de x en fonction de t pour $0 \leq t \leq 60$ et à partir de là, trouvez la quantité maximale de sel dans le réservoir et la valeur de t pour laquelle cela se produit. [5]

(d) Trouvez la valeur de t pour laquelle la quantité de sel dans le réservoir décroît le plus rapidement. [2]

Le taux de variation de la quantité de sel qui sort du réservoir est égal à $\frac{x}{t+1}$.

(e) Trouvez la quantité de sel qui est sortie du réservoir au cours des 60 premières minutes. [4]

12. [Note maximale : 19]

(a) Montrez que $\cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$. [1]

(b) Vérifiez que $x = \tan \theta$ et $x = -\cot \theta$ satisfont l'équation $x^2 + (2 \cot 2\theta)x - 1 = 0$. [7]

(c) À partir de là, ou par toute autre méthode, montrez que la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$. [5]

(d) En utilisant les résultats des parties (b) et (c), trouvez la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{24} - \cot \frac{\pi}{24}$. Donnez votre réponse sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$. [6]



Barème de notation

Spécimen d'épreuve

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur

Épreuve 2

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

*Attribuez des points à l'aide des annotations tel qu'indiqué dans le barème de notation, par exemple **M1**, **A2**.*

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- En règle générale, il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **A1**, étant donné que les points **A** dépendent des éventuels points **M** qui précèdent.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, par exemple **M1A1**, cela signifie habituellement **M1** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple, substitution dans une formule) et **A1** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Si deux points **A** ou plus sont marqués sur la même ligne, ils peuvent être attribués de façon indépendante ; par exemple, si la première valeur est incorrecte, mais que les deux suivantes sont correctes, attribuez **A0A1A1**.
- Lorsque le barème de notation précise **M2**, **A2**, etc., **ne fractionnez pas** ces points (sauf indication contraire dans une remarque).
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit. Cependant, si le raisonnement qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier **A1**. Les réponses numériques peuvent néanmoins être une exception, dans le cas où une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Par contre, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une partie ultérieure et que le raisonnement montré est correct, attribuez des points de suivi **FT**, mais n'attribuez pas le dernier **A1** dans cette partie.

Exemples :

	Réponse correcte vue	Raisonnement additionnel vu	Action
1.	$8\sqrt{2}$	5,656 85... (valeur décimale incorrecte)	Attribuer le dernier A1 (ignorer le raisonnement additionnel)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	Ne pas attribuer le dernier A1
3.	$\log a - \log b$	$\log (a - b)$	Ne pas attribuer le dernier A1

3 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses**, par exemple (**M1**), et peuvent seulement être attribués si un raisonnement **correct** est vu ou si ce dernier est implicite dans le raisonnement subséquent.

- Normalement, le raisonnement correct est vu ou implicite dans la prochaine ligne de la démarche.
- Des points **sans** parenthèses ne peuvent être attribués que pour un raisonnement qui est **vu**.

4 Points de suivi (attribués uniquement suite à une erreur du candidat)

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes** ou sous-partie(s). En règle générale, pour accorder des points **FT**, il faut que les étapes du travail soient présentées et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente. Cependant, si une sous-partie se voit attribuer des points uniquement pour la réponse (c'est-à-dire qu'aucun raisonnement n'est indiqué), alors des points **FT** doivent être attribués le cas échéant.

- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une **erreur** est commise, aucun autre point **A** ne peut être attribué au travail faisant intervenir l'erreur, mais des points **M** peuvent être attribués, le cas échéant.
- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, utilisation de $r > 1$ pour la somme d'une série géométrique infinie, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Le mot « leur » peut apparaître dans une description du barème de notation afin d'indiquer la possibilité que les candidats utilisent une valeur incorrecte.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.
- Si un candidat commet une erreur dans une partie, mais obtient une ou des réponses correctes dans la ou les parties suivantes, attribuez les points appropriés, sauf indication contraire dans la question. Une approche différente ne dépendant pas des réponses aux parties précédentes peut souvent être utilisée dans les parties suivantes.

5 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquez une pénalité **MR** de 1 point pour cette question.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Si un candidat copie incorrectement son propre travail, cela ne constitue **pas** une erreur de lecture, il s'agit d'une erreur.
- La pénalité **MR** ne peut être appliquée que lorsque le raisonnement est vu. Pour les questions avec la calculatrice, sans raisonnement et avec des réponses incorrectes, les examinateurs ne doivent **pas** présumer que les valeurs ont été mal lues.

6 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **SOIT . . . OU**.

7 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens), apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

8 Précision des réponses

Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera attribué si la réponse est fournie avec le niveau de précision requis. Il y a deux types d'erreurs de précision et le point pour la réponse finale ne doit pas être attribué si ces erreurs surviennent.

- **Erreurs d'arrondi** : concerne uniquement les réponses finales, pas les étapes intermédiaires.
- **Niveau de précision** : lorsque cela n'est pas spécifié dans la question, la règle générale s'applique aux réponses finales : *sauf en cas d'indication contraire contenue dans la question, les candidats doivent toujours fournir des réponses numériques exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.*

9 Calculatrices

L'utilisation d'une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve, mais les calculatrices équipées de fonctions de manipulation symbolique ne sont pas autorisées.

Notations propres aux calculatrices

Dans le Guide de mathématiques, il est indiqué que :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes et non les notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.

N'acceptez **pas** les réponses finales écrites à l'aide de notations propres aux calculatrices. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation de notations propres aux calculatrices dans le raisonnement.

Section A

1. (a) **MÉTHODE 1**

tenter d'utiliser la loi des cosinus

(M1)

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 4} \text{ (ou l'équivalent)}$$

A1

$$\theta = 1,35$$

A1

[3 points]

MÉTHODE 2

tenter de séparer le triangle AOB en deux triangles rectangles congrus

(M1)

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2,5}{4}$$

A1

$$\theta = 1,35$$

A1

[3 points]

(b) tenter de trouver l'aire de la région ombragée

(M1)

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times (2\pi - 1,35\dots)$$

A1

$$= 39,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

A1

[3 points]

Total [6 points]

2. (a) $\left(1 + \frac{5,5}{4 \times 100}\right)^4$

$$= 1,056$$

(M1)(A1)

A1

[3 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 2

(b) **SOIT**

$$2P = P \times \left(1 + \frac{5,5}{100 \times 4}\right)^{4n} \quad \text{OU} \quad 2P = P \times (\text{leur } (a))^m \quad (M1)(A1)$$

Note : Attribuer **(M1)** pour avoir substitué dans la formule de remboursement d'un prêt.
Attribuer **(A1)** pour une substitution correcte.

OU

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 5,5$$

$$P/Y = 4$$

$$C/Y = 4$$

$$n = 50,756\dots$$

(M1)(A1)

OU

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 100(\text{leur } (a) - 1)$$

$$P/Y = 1$$

$$C/Y = 1$$

(M1)(A1)

ALORS

$$\Rightarrow 12,7 \text{ ans}$$

Laurie aura doublé le montant qu'elle a investi au cours de 2032

A1

[3 points]

Total [6 points]

3. (a) reconnaître une binomiale

(M1)

$$X \sim B(5 ; 0,7)$$

tenter de trouver $P(X \leq 3)$

M1

$$= 0,472 (= 0,47178)$$

A1

[3 points]

(b) reconnaître qu'il y a eu 2 « six » en 4 lancers

(M1)

$$P(3^{\text{e}} \text{ « six » au } 5^{\text{e}} \text{ lancer}) = \left[\binom{4}{2} \times (0,7)^2 \times (0,3)^2 \right] \times 0,7 (= 0,2646 \times 0,7)$$

A1

$$= 0,185 (= 0,18522)$$

A1

[3 points]

Total [6 points]

4. (a) $a = 1,29$ et $b = -10,4$ A1A1
[2 points]
- (b) reconnaître que les deux droites passent par le point moyen
 $p = 28,7$, $q = 30,3$ (M1)
A2
[3 points]
- (c) substitution dans **leur** équation de x sur y (M1)
 $x = 1,29082(29) - 10,3793$
 $x = 27,1$ A1
- Note : Accepter 27.
- [2 points]
- Total [7 points]
5. (a) utiliser une représentation graphique pour trouver les coordonnées du minimum relatif (M1)
 $s = -16,513...$ (A1)
distance maximale est 16,5 cm (à gauche de O) A1
[3 points]
- (b) tenter de trouver l'instant auquel la particule change de direction, en considérant *par exemple*, le premier maximum de la représentation graphique de s ou la valeur de t au premier point d'intersection entre la représentation graphique de s' avec l'axe des abscisses (M1)
 $t = 1,51986...$ (A1)
- tenter de trouver la pente de s' pour **leur** valeur de t , $s''(1,51986...)$ (M1)
 $= -8,92 \text{ (cm/s}^2\text{)}$ A1
[4 points]
- Total [7 points]

6. (a) **MÉTHODE 1**

tenter d'utiliser la formule de l'espérance mathématique (M1)

$$E(X) = (1 \times 0,60) + (2 \times 0,30) + (3 \times 0,03) + (4 \times 0,05) + (5 \times 0,02)$$

$$E(X) = 1,59(\$)$$
 (A1)

use of $E(1,20X + 2,40) = 1,20E(X) + 2,40$ (M1)

$$E(T) = 1,20(1,59) + 2,40$$

$$= 4,31(\$)$$
 A1

MÉTHODE 2

tenter de trouver la distribution de probabilité pour T (M1)

t	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40
$P(T=t)$	0,60	0,30	0,03	0,05	0,02

(A1)

tenter d'utiliser la formule de l'espérance mathématique (M1)

$$E(T) = (3,60 \times 0,60) + (4,80 \times 0,30) + (6,00 \times 0,03) + (7,20 \times 0,05) + (8,40 \times 0,02)$$

$$= 4,31(\$)$$
 A1

[4 points]

(b) **MÉTHODE 1**

utiliser $\text{Var}(1,20X + 2,40) = (1,20)^2 \text{Var}(X)$ avec $\text{Var}(X) = 0,8419$ (M1)

$$\text{Var}(T) = 1,21$$
 A1

MÉTHODE 2

trouver l'écart type de leur distribution de probabilité trouvée dans la partie (a) (M1)

$$\text{Var}(T) = (1,101\dots)^2$$

$$= 1,21$$
 A1

Note : Attribuer **M1A1** pour $\text{Var}(T) = (1,093\dots)^2 = 1,20$.

[2 points]

Total [6 points]

7. tenter de trouver $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, par exemple **(M1)**

$$\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

tenter de trouver $|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$ **M1**

distance $d(t) = \sqrt{(3-5t)^2 + (4t-6)^2} \left(= \sqrt{41t^2 - 78t + 45} \right)$ **A1**

utiliser une représentation graphique pour trouver l'ordonnée d du minimum relatif **M1**

la distance minimale entre les bateaux est $2,81(\text{km}) \left(= \frac{11\sqrt{41}}{41}(\text{km}) \right)$ **A1**

Total [5 points]

8. substituer $w = 2iz$ dans $z^* - 3w = 5 + 5i$ **M1**

$z^* - 6iz = 5 + 5i$ **A1**

soit $z = x + yi$

comparer les parties réelles et imaginaires de $(x - yi) - 6i(x + yi) = 5 + 5i$ **M1**

pour obtenir $x + 6y = 5$ et $-6x - y = 5$ **A1**

tenter de résoudre pour x et y **M1**

$x = -1$ et $y = 1$, et donc $z = -1 + i$ **A1**

donc $w = -2 - 2i$ **A1**

Total [7 points]

9. MÉTHODE 1

esquisser la représentation graphique de $y = \frac{x^2}{x-3}$ ($y = x + 3 + \frac{9}{x-3}$) **M1**

l'asymptote (oblique) a une pente égale à 1

et donc, la valeur maximale de m est 1 **R1**

considération d'une droite de pente plus prononcée que la droite horizontale passant par $(-3, 0)$ et $(0, 0)$ **M1**

donc $m > 0$ **R1**

d'où $0 < m \leq 1$ **A1**

MÉTHODE 2

tenter d'éliminer y pour obtenir une équation quadratique en x **M1**

$$x^2 = m(x^2 - 9)$$

$$\Rightarrow (m-1)x^2 - 9m = 0$$
 A1

SOIT

tenter de résoudre $-4(m-1)(-9m) < 0$ pour m **M1**

OU

tenter de résoudre $x^2 < 0$, c'est-à-dire $\frac{9m}{m-1} < 0$ ($m \neq 1$) pour m **M1**

ALORS

$$\Rightarrow 0 < m < 1$$
 A1

une raison valide pour expliquer pourquoi $m = 1$ donne aucune solution,

par exemple, si $m = 1$, $(m-1)x^2 - 9m = 0 \Rightarrow -9 = 0$ et donc $0 < m \leq 1$ **R1**

Total [5 points]

Section B

10. (a) tenter d'utiliser la symétrie d'une courbe normale (M1)
par exemple, diagramme, $0,5 - 0,1446$
 $P(24,15 < X < 25) = 0,3554$ A1
[2 points]
- (b) (i) utiliser le calcul inverse d'une normale pour trouver la cote z (M1)
 $z = -1,0598$
 substitution correcte $\frac{24,15 - 25}{\sigma} = -1,0598$ (A1)
 $\sigma = 0,802$ A1
- (ii) $P(X > 26) = 0,106$ (M1)A1
[5 points]
- (c) reconnaître une probabilité binomiale (M1)
 $E(Y) = 10 \times 0,10621$ (A1)
 $= 1,06$ A1
[3 points]
- (d) $P(Y = 3)$ (M1)
 $= 0,0655$ A1
[2 points]
- (e) reconnaître une probabilité conditionnelle (M1)
 substitution correcte A1
 $\frac{0,3554}{1 - 0,10621}$
 $= 0,398$ A1
[3 points]
- Total [15 points]**

11. (a) **MÉTHODE 1**

utiliser $I(t) = e^{\int P(t) dt}$ **M1**

$$e^{\int \frac{1}{t+1} dt}$$

$$= e^{\ln(t+1)}$$

$$= t+1$$

A1
AG

MÉTHODE 2

tenter d'utiliser la règle de la dérivée d'un produit pour dériver $\frac{d}{dt}(x(t+1))$ **M1**

$$\frac{d}{dt}(x(t+1)) = \frac{dx}{dt}(t+1) + x$$

$$= (t+1) \left(\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t+1} \right)$$

A1

par conséquent $t+1$ est un facteur intégrant pour cette équation différentielle **AG**

[2 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 11

(b) tenter de multiplier par $(t+1)$ et réorganiser pour obtenir **(M1)**

$$(t+1)\frac{dx}{dt} + x = 10(t+1)e^{-\frac{t}{4}} \quad \text{A1}$$

$$\frac{d}{dt}(x(t+1)) = 10(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$$

$$x(t+1) = \int 10(t+1)e^{-\frac{t}{4}} dt \quad \text{A1}$$

tenter d'intégrer le membre de droite par parties **M1**

$$= -40(t+1)e^{-\frac{t}{4}} + 40 \int e^{-\frac{t}{4}} dt$$

$$= -40(t+1)e^{-\frac{t}{4}} - 160e^{-\frac{t}{4}} + C \quad \text{A1}$$

Note : Tolérer l'absence de C .

SOIT

substituer $t = 0, x = 0 \Rightarrow C = 200$ **M1**

$$x = \frac{-40(t+1)e^{-\frac{t}{4}} - 160e^{-\frac{t}{4}} + 200}{t+1} \quad \text{A1}$$

utiliser $-40e^{-\frac{t}{4}}$ comme le plus grand facteur commun de $-40(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$

et $-160e^{-\frac{t}{4}}$ **M1**

OU

utiliser $-40e^{-\frac{t}{4}}$ comme le plus grand facteur commun de $-40(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$

et $-160e^{-\frac{t}{4}}$, ce qui donne $x(t+1) = -40e^{-\frac{t}{4}}(t+5) + C$ (ou l'équivalent) **M1A1**

substituer $t = 0, x = 0 \Rightarrow C = 200$ **M1**

ALORS

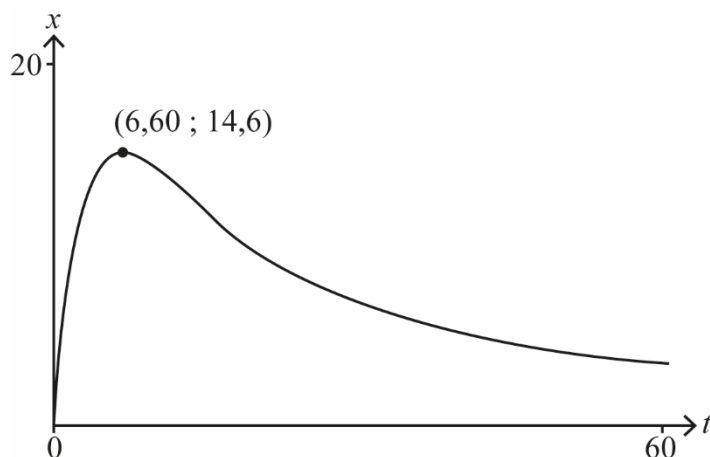
$$x(t) = \frac{200 - 40e^{-\frac{t}{4}}(t+5)}{t+1} \quad \text{AG}$$

[8 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 11

(c)



la représentation graphique part de l'origine et possède un maximum relatif (coordonnées non exigées)

A1

esquissée pour $0 \leq t \leq 60$

A1

concavité correcte pour $0 \leq t \leq 60$

A1

la quantité maximale de sel est de 14,6 (grammes) lorsque $t = 6,60$ (minutes)

A1A1

[5 points]

(d) utiliser une représentation graphique appropriée ou une équation (dérivée première ou seconde)

M1

la quantité de sel décroît le plus rapidement lorsque $t = 12,9$ (minutes)

A1

[2 points]

(e) **SOIT**

tenter de poser une intégrale qui représente la quantité de sel qu'il reste dans le réservoir

M1

$$\int_0^{60} \frac{x(t)}{t+1} dt$$

$$\int_0^{60} \frac{200 - 40e^{-\frac{t}{4}}(t+5)}{(t+1)^2} dt$$

A1

OU

tenter de poser une intégrale qui représente la quantité de sel versée dans le réservoir moins la quantité de sel dans le réservoir lorsque $t = 60$ (minutes)

M1

la quantité de sel qu'il reste dans le réservoir est $\int_0^{60} 10e^{-\frac{t}{4}} dt - x(60)$

A1

ALORS

= 36,7 (grammes)

A2

[4 points]

Total [21 points]

12. (a) indiquer la relation entre $\cot$ et $\tan$, et indiquer l'identité pour $\tan 2\theta$ **M1**

$$\cot 2\theta = \frac{1}{\tan 2\theta} \text{ et } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$$

AG

[1 point]

- (b) **MÉTHODE 1**

tenter de substituer $\tan \theta$ pour x et utiliser le résultat de (a) **M1**

$$\text{MEMBRE DE GAUCHE} = \tan^2 \theta + 2 \tan \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \right) - 1 \quad \text{A1}$$

$$\tan^2 \theta + 1 - \tan^2 \theta - 1 = 0 (= \text{MEMBRE DE DROITE}) \quad \text{A1}$$

par conséquent $x = \tan \theta$ satisfait l'équation **AG**

tenter de substituer $-\cot \theta$ pour x et utiliser le résultat de (a) **M1**

$$\text{MEMBRE DE GAUCHE} = \cot^2 \theta - 2 \cot \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \right) - 1 \quad \text{A1}$$

$$= \frac{1}{\tan^2 \theta} - \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right) - 1 \quad \text{A1}$$

$$\frac{1}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1 - 1 = 0 (= \text{MEMBRE DE DROITE}) \quad \text{A1}$$

par conséquent $x = -\cot \theta$ satisfait l'équation **AG**

MÉTHODE 2

soit $\alpha = \tan \theta$ et $\beta = -\cot \theta$

tenter de trouver la somme des racines **M1**

$$\alpha + \beta = \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan \theta} \quad \text{A1}$$

$$= -2 \cot 2\theta \text{ (découlant de la partie (a))} \quad \text{A1}$$

tenter de trouver le produit des racines **M1**

$$\alpha\beta = \tan \theta \times (-\cot \theta) \quad \text{A1}$$

$$= -1 \quad \text{A1}$$

le coefficient de x et le terme constant dans la quadratique sont $2 \cot 2\theta$ et -1 respectivement **R1**

donc, les deux racines sont $\alpha = \tan \theta$ et $\beta = -\cot \theta$ **AG**

[7 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 12

(c) **MÉTHODE 1**

$$x = \tan \frac{\pi}{12} \text{ et } x = -\cot \frac{\pi}{12} \text{ sont des racines de } x^2 + \left(2 \cot \frac{\pi}{6}\right)x - 1 = 0 \quad \mathbf{R1}$$

Note : Attribuer **R1** si seulement $x = \tan \frac{\pi}{12}$ est indiqué comme une racine

$$\text{de } x^2 + \left(2 \cot \frac{\pi}{6}\right)x - 1 = 0 .$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad \mathbf{A1}$$

tenter de résoudre **leur** équation quadratique **M1**

$$x = -\sqrt{3} \pm 2 \quad \mathbf{A1}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} > 0 \quad (-\cot \frac{\pi}{12} < 0) \quad \mathbf{R1}$$

$$\text{donc } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \quad \mathbf{AG}$$

MÉTHODE 2

tenter de substituer $\theta = \frac{\pi}{12}$ dans l'identité pour $\tan 2\theta$ **M1**

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{12} - 1 = 0 \quad \mathbf{A1}$$

tenter de résoudre **leur** équation quadratique **M1**

$$\tan \frac{\pi}{12} = -\sqrt{3} \pm 2 \quad \mathbf{A1}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} > 0 \quad \mathbf{R1}$$

$$\text{donc } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \quad \mathbf{AG}$$

[5 points]

$$(d) \quad \tan \frac{\pi}{24} - \cot \frac{\pi}{24} \text{ est la somme des racines de } x^2 + \left(2 \cot \frac{\pi}{12}\right)x - 1 = 0 \quad \mathbf{R1}$$

$$\tan \frac{\pi}{24} - \cot \frac{\pi}{24} = -2 \cot \frac{\pi}{12} \quad \mathbf{A1}$$

$$= \frac{-2}{2 - \sqrt{3}} \quad \mathbf{A1}$$

tenter de rationaliser **leur** dénominateur **(M1)**

$$= -4 - 2\sqrt{3} \quad \mathbf{A1A1}$$

[6 points]

Total [19 points]

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

Spécimen d'épreuve

1 heure

Instructions destinées aux candidats

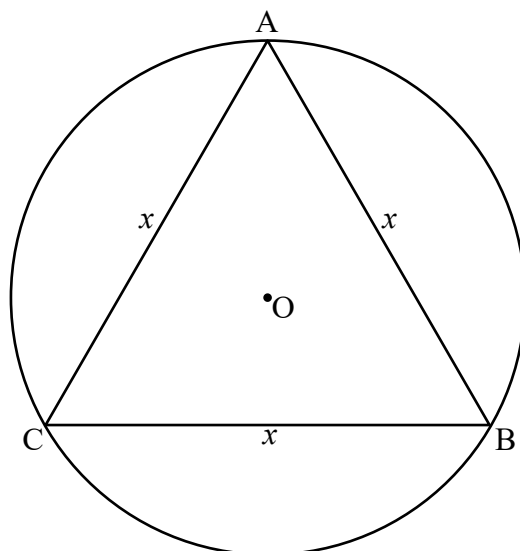
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez aux **deux** questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

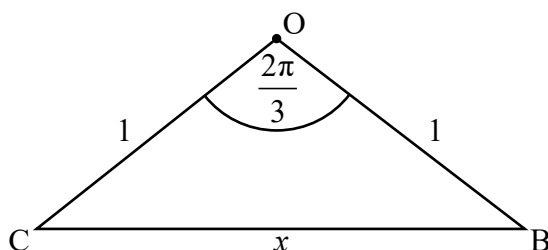
1. [Note maximale : 30]

Cette question vous demande d'étudier des polygones réguliers à n côtés inscrits et circonscrits dans un cercle, ainsi que le périmètre de ces derniers lorsque n tend vers l'infini, afin d'obtenir une approximation pour π .

- (a) Considérez un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure x unités, inscrit dans un cercle de rayon égal à 1 unité et de centre O, tel que montré dans le diagramme suivant.



Le triangle équilatéral ABC peut être divisé en trois triangles isocèles plus petits, chacun ayant un angle au centre de $\frac{2\pi}{3}$, tel que montré dans le diagramme suivant.



En utilisant la trigonométrie du triangle rectangle, ou par toute autre méthode, montrez que le périmètre du triangle équilatéral ABC est égal à $3\sqrt{3}$ unités.

[3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

- (b) Considérez un carré dont le côté mesure x unités, inscrit dans un cercle de rayon égal à 1 unité.
En divisant le carré inscrit en quatre triangles isocèles, trouvez le périmètre exact du carré inscrit. [3]

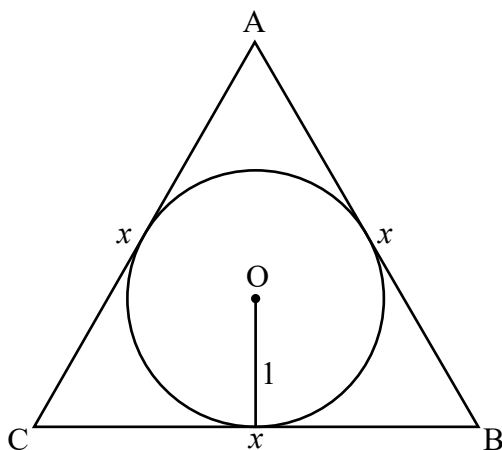
- (c) Trouvez le périmètre d'un hexagone régulier, dont le côté mesure x unités, inscrit dans un cercle de rayon égal à 1 unité. [2]

Soit $P_i(n)$ le périmètre de tout polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon égal à 1 unité.

- (d) Montrez que $P_i(n) = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. [3]

- (e) Utilisez un développement approprié en série de Maclaurin pour trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} P_i(n)$ et interprétez géométriquement ce résultat. [5]

Considérez un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure x unités, circonscrit autour d'un cercle de rayon égal à 1 unité et de centre O, tel que montré dans le diagramme suivant.



Soit $P_c(n)$ le périmètre de tout polygone régulier à n côtés circonscrit autour d'un cercle de rayon égal à 1 unité.

- (f) Montrez que $P_c(n) = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. [4]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Considérez la fonction $P(x) = 2x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$, où $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$.

(g) (i) En écrivant $P(x)$ sous la forme $\frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, trouvez $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$.

(i) À partir de là, indiquez la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} P_c(n)$ pour des valeurs entières de n , où $n > 2$.

[5]

(h) Utilisez les résultats des parties (d) et (f) pour déterminer une inéquation pour la valeur de π en fonction de n .

[2]

L'inéquation trouvée dans la partie (h) peut être utilisée pour déterminer des approximations d'une borne inférieure et d'une borne supérieure pour la valeur de π .

(i) Déterminez la plus petite valeur de n telle que les approximations des bornes inférieure et supérieure sont toutes deux à moins de 0,005 de π .

[3]

2. [Note maximale : 25]

Cette question vous demande d'étudier certaines propriétés de la suite de fonctions de la forme $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$ et $n \in \mathbb{Z}^+$.

Important : Dans vos esquisses de représentations graphiques dans cette question, vous **n'êtes pas** obligé de trouver les coordonnées des points d'intersection avec les axes ou les coordonnées des points stationnaires, à moins que cela soit demandé dans la question.

- (a) Sur le même système d'axes, esquissez les représentations graphiques de $y = f_1(x)$ et $y = f_3(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$. [2]
- (b) Pour des valeurs impaires de $n > 2$, utilisez votre calculatrice à écran graphique pour faire varier systématiquement la valeur de n . À partir de là, suggérez une expression pour les valeurs impaires de n qui décrit, en fonction de n , le nombre de
- (i) maximum relatifs ;
- (ii) minimum relatifs. [4]
- (c) Sur un nouveau système d'axes, esquissez les représentations graphiques de $y = f_2(x)$ et $y = f_4(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$. [2]
- (d) Pour des valeurs paires de $n > 2$, utilisez votre calculatrice à écran graphique pour faire varier systématiquement la valeur de n . À partir de là, suggérez une expression pour les valeurs paires de n qui décrit, en fonction de n , le nombre de
- (i) maximum relatifs ;
- (ii) minimum relatifs. [4]
- (e) Résolvez l'équation $f_n'(x) = 0$ et à partir de là, montrez que les points stationnaires sur la représentation graphique de $y = f_n(x)$ surviennent lorsque $x = \cos \frac{k\pi}{n}$, où $k \in \mathbb{Z}^+$ et $0 < k < n$. [4]

La suite de fonctions, $f_n(x)$, définie ci-dessus, peut être exprimée comme une suite de polynômes de degré n .

- (f) Utilisez une identité trigonométrique appropriée pour montrer que $f_2(x) = 2x^2 - 1$. [2]

Considérez $f_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos x)$.

- (g) Utilisez une identité trigonométrique appropriée pour montrer que $f_{n+1}(x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$. [2]
- (h) À partir de là,
- (i) montrez que $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$;
- (ii) exprimez $f_3(x)$ comme un polynôme de degré trois. [5]

Barème de notation

Spécimen d'épreuve

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur

Épreuve 3

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

*Attribuez des points à l'aide des annotations tel qu'indiqué dans le barème de notation, par exemple **M1**, **A2**.*

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- En règle générale, il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **A1**, étant donné que les points **A** dépendent des éventuels points **M** qui précèdent.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, par exemple **M1A1**, cela signifie habituellement **M1** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple, substitution dans une formule) et **A1** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Si deux points **A** ou plus sont marqués sur la même ligne, ils peuvent être attribués de façon indépendante ; par exemple, si la première valeur est incorrecte, mais que les deux suivantes sont correctes, attribuez **A0A1A1**.
- Lorsque le barème de notation précise **M2**, **A2**, etc., **ne fractionnez pas** ces points (sauf indication contraire dans une remarque).
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit. Cependant, si le raisonnement qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier **A1**. Les réponses numériques peuvent néanmoins être une exception, dans le cas où une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Par contre, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une partie ultérieure et que le raisonnement montré est correct, attribuez des points de suivi **FT**, mais n'attribuez pas le dernier **A1** dans cette partie.

Exemples :

	Réponse correcte vue	Raisonnement additionnel vu	Action
1.	$8\sqrt{2}$	5,656 85... (valeur décimale incorrecte)	Attribuer le dernier A1 (ignorer le raisonnement additionnel)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	Ne pas attribuer le dernier A1
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	Ne pas attribuer le dernier A1

3 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses, par exemple (M1)**, et peuvent seulement être attribués si un raisonnement **correct** est vu ou si ce dernier est implicite dans le raisonnement subséquent.

- Normalement, le raisonnement correct est vu ou implicite dans la prochaine ligne de la démarche.
- Des points **sans** parenthèses ne peuvent être attribués que pour un raisonnement qui est **vu**.

4 Points de suivi (attribués uniquement suite à une erreur du candidat)

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes** ou sous-partie(s). En règle générale, pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente**. Cependant, si une sous-partie se voit attribuer des points uniquement pour la réponse (c'est-à-dire qu'aucun raisonnement n'est indiqué), alors des points **FT** doivent être attribués le cas échéant.

- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une **erreur** est commise, aucun autre point **A** ne peut être attribué au travail faisant intervenir l'erreur, mais des points **M** peuvent être attribués, le cas échéant.
- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, utilisation de $r > 1$ pour la somme d'une série géométrique infinie, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Le mot « leur » peut apparaître dans une description du barème de notation afin d'indiquer la possibilité que les candidats utilisent une valeur incorrecte.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.
- Si un candidat commet une erreur dans une partie, mais obtient une ou des réponses correctes dans la ou les parties suivantes, attribuez les points appropriés, sauf indication contraire dans la question. Une approche différente ne dépendant pas des réponses aux parties précédentes peut souvent être utilisée dans les parties suivantes.

5 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquez une pénalité **MR** de 1 point pour cette question.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Si un candidat copie incorrectement son propre travail, cela ne constitue **pas** une erreur de lecture, il s'agit d'une erreur.
- La pénalité **MR** ne peut être appliquée que lorsque le raisonnement est vu. Pour les questions avec la calculatrice, sans raisonnement et avec des réponses incorrectes, les examinateurs ne doivent **pas** présumer que les valeurs ont été mal lues.

6 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **SOIT . . . OU**.

7 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens), apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

8 Précision des réponses

Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera attribué si la réponse est fournie avec le niveau de précision requis. Il y a deux types d'erreurs de précision et le point pour la réponse finale ne doit pas être attribué si ces erreurs surviennent.

- **Erreurs d'arrondi** : concerne uniquement les réponses finales, pas les étapes intermédiaires.
- **Niveau de précision** : lorsque cela n'est pas spécifié dans la question, la règle générale s'applique aux réponses finales : *sauf en cas d'indication contraire contenue dans la question, les candidats doivent toujours fournir des réponses numériques exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.*

9 Calculatrices

L'utilisation d'une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve, mais les calculatrices équipées de fonctions de manipulation symbolique ne sont pas autorisées.

Notations propres aux calculatrices

Dans le Guide de mathématiques, il est indiqué que :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes et non les notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.

N'acceptez **pas** les réponses finales écrites à l'aide de notations propres aux calculatrices. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation de notations propres aux calculatrices dans le raisonnement.

1. (a) **MÉTHODE 1**

considérer le triangle rectangle OCX, où $CX = \frac{x}{2}$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{x}{2}}{1}$$

M1A1

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

A1

$$P_i = 3 \times x = 3\sqrt{3}$$

AG

MÉTHODE 2

utiliser, *par exemple*, la loi des cosinus $x^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos \frac{2\pi}{3}$

M1A1

$$x = \sqrt{3}$$

A1

$$P_i = 3 \times x = 3\sqrt{3}$$

AG

Note : Accepter l'utilisation de la loi des sinus.

[3 points]

(b) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{x}$, où x = côté du carré

M1

$$x = \sqrt{2}$$

A1

$$P_i = 4\sqrt{2}$$

A1

[3 points]

(c) 6 triangles équilatéraux $\Rightarrow x = 1$

A1

$$P_i = 6$$

A1

[2 points]

(d) dans le triangle rectangle $\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{\frac{x}{2}}{1}$

M1

$$\Rightarrow x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

A1

$$P_i = n \times x$$

$$P_i = n \times 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

M1

$$P_i = 2n \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

AG

[3 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 1

(e) considérer $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

utiliser $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

M1

$$2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3} + \frac{\pi^5}{120n^5} - \dots \right)$$

(A1)

$$= 2 \left(\pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} - \dots \right)$$

A1

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi$$

A1

lorsque $n \rightarrow \infty$ le polygone devient un cercle de rayon 1 et $P_i = 2\pi$

R1

[5 points]

(f) considérer un polygone à n côtés dont le côté mesure x

$2n$ triangles rectangles dont l'angle au centre est $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$

M1A1

côté opposé $\frac{x}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow x = 2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

M1A1

Périmètre $P_c = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

AG

[4 points]

(g) (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$

R1

tenter d'utiliser la règle de L'Hôpital

M1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2\pi}{x^2} \sec^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

A1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 2\pi$$

A1

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_c(n) = 2\pi$

A1

[5 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 1

(h) $P_i < 2\pi < P_e$

$$2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < 2\pi < 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

M1

$$n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

A1

[2 points]

- (i) tenter de trouver les approximations des bornes inférieure et supérieure qui sont à moins de 0,005 de π

(M1)

$$n = 46$$

A2

[3 points]

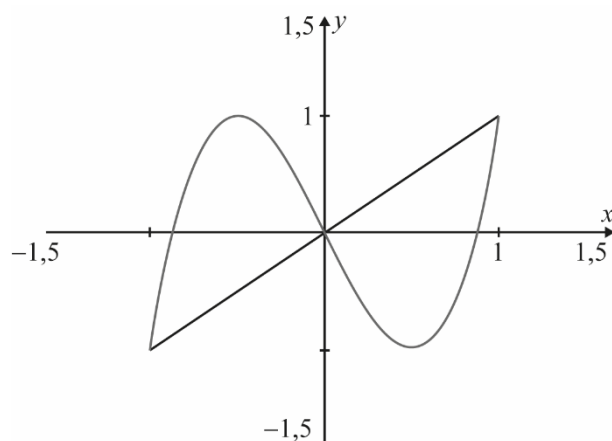
Total [30 points]

2. (a) représentation graphique correcte de $y = f_1(x)$

A1

- représentation graphique correcte de $y = f_3(x)$

A1



[2 points]

- (b) (i) preuve graphique ou par tableau de la variation systématique de n
par exemple, $n = 3$, 1 maximum relatif et 1 minimum relatif

M1

$n = 5$, 2 maximums relatifs et 2 minimums relatifs

$n = 7$, 3 maximums relatifs et 3 minimums relatifs

(A1)

$$\frac{n-1}{2} \text{ maximums relatifs}$$

A1

(ii) $\frac{n-1}{2}$ maximums relatifs

A1

Note : Accorder des points de suivi à partir d'une expression incorrecte de la formule pour les maximums relatifs.

[4 points]

suite de la question à la page suivante...

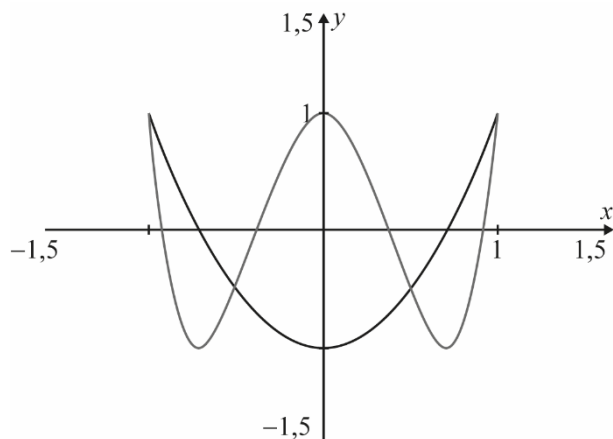
Suite de la question 2

(c) représentation graphique correcte de $y = f_2(x)$

A1

représentation graphique correcte de $y = f_4(x)$

A1



[2 points]

(d) (i) preuve graphique ou par tableau de la variation systématique de n

M1

par exemple, $n = 2$, 0 maximum relatif et 1 minimum relatif

$n = 4$, 1 maximum relatif et 2 minimums relatifs

$n = 6$, 2 maximums relatifs et 3 minimums relatifs

(A1)

$\frac{n-2}{2}$ maximums relatifs

A1

(ii) $\frac{n}{2}$ minimums relatifs

A1

[4 points]

(e) $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

$$f'_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

M1A1

Note : Attribuer **M1** pour tenter d'utiliser la règle de dérivation en chaîne.

$$f'_n(x) = 0 \Rightarrow n \sin(n \arccos(x)) = 0$$

M1

$$n \arccos(x) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

A1

menant à

$$x = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } 0 < k < n)$$

AG

[4 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 2

- (f) $f_2(x) = \cos(2 \arccos x)$
 $= 2(\cos(\arccos x))^2 - 1$ **M1**
 indiquer que $(\cos(\arccos x)) = x$ **A1**
 donc $f_2(x) = 2x^2 - 1$ **AG**
[2 points]
- (g) $f_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos x)$
 $= \cos(n \arccos x + \arccos x)$ **A1**
 utiliser $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ menant à **M1**
 $= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$ **AG**
[2 points]
- (h) (i) $f_{n-1}(x) = \cos((n-1) \arccos x)$ **A1**
 $= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$ **M1**
 $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x)$ **A1**
 $= 2x f_n(x)$ **AG**
- (ii) $f_3(x) = 2x f_2(x) - f_1(x)$ **(M1)**
 $= 2x(2x^2 - 1) - x$
 $= 4x^3 - 3x$ **A1**
[5 points]
- Total [25 points]**
-

**Mathématiques : analyse et approches**
Niveau moyen
Épreuve 1

Spécimen d'épreuve

Numéro de session du candidat

1 heure 30 minutes

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.



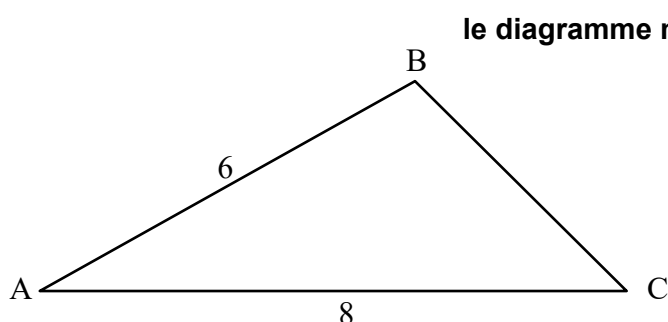
Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Le diagramme suivant montre le triangle ABC, avec $AB = 6$ et $AC = 8$.



- (a) Étant donné que $\cos \hat{A} = \frac{5}{6}$, trouvez la valeur de $\sin \hat{A}$. [3]
- (b) Trouvez l'aire du triangle ABC. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Note maximale : 5]

Soit A et B des événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,6$.
Trouvez $P(A | B)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Note maximale : 5]

(a) Montrez que $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, où $n \in \mathbb{Z}$. [2]

(b) À partir de là, ou par toute autre méthode, prouvez que la somme des carrés de deux entiers impairs consécutifs est paire. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Note maximale : 5]

Soit $f'(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Étant donné que $f(0) = 5$, trouvez $f(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Note maximale : 5]

Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = \frac{x+3}{4}$ et $g(x) = 8x+5$.

(a) Montrez que $(g \circ f)(x) = 2x + 11$. [2]

(b) Étant donné que $(g \circ f)^{-1}(a) = 4$, trouvez la valeur de a . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Note maximale : 8]

(a) Montrez que $\log_9 (\cos 2x + 2) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$. [3]

(b) À partir de là, ou par toute autre méthode, résolvez $\log_3 (2 \sin x) = \log_9 (\cos 2x + 2)$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



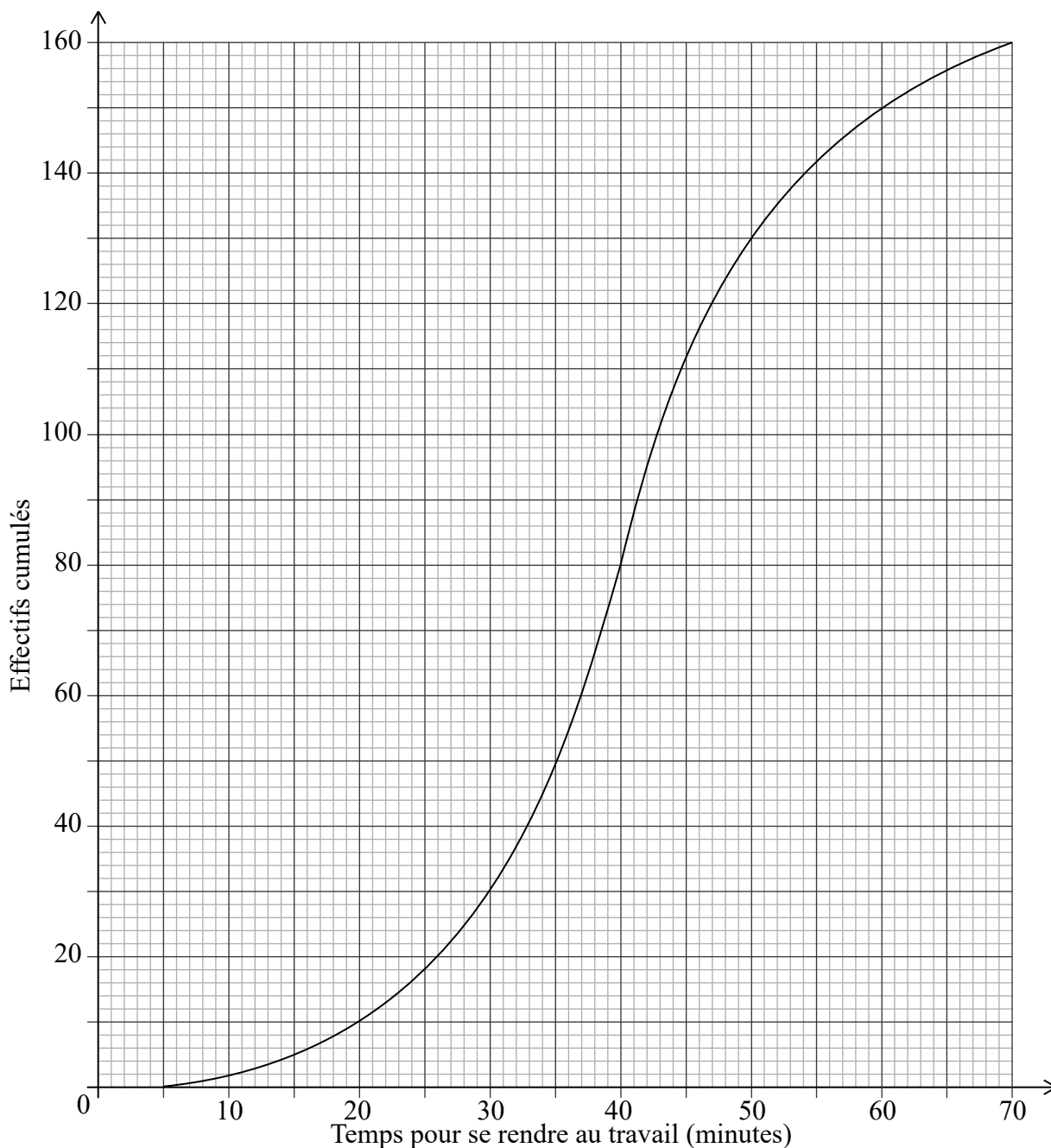
N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

7. [Note maximale : 15]

Une grande entreprise a interrogé 160 de ses employés pour savoir combien de temps ils prenaient pour se rendre au travail un jour donné. Les résultats du sondage sont montrés par la courbe des effectifs cumulés suivante.



(Suite de la question à la page suivante)



12EP08

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 7)

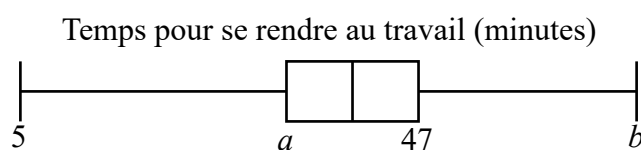
(a) Trouvez le nombre médian de minutes pour se rendre au travail. [2]

(b) Trouvez le nombre d'employés dont le temps pour se rendre au travail est à moins de 15 minutes de la médiane. [3]

Seulement 10% des employés prennent plus que k minutes pour se rendre au travail.

(c) Trouvez la valeur de k . [3]

Les résultats du sondage peuvent aussi être présentés dans le diagramme en boîte suivant.



(d) Écrivez la valeur de b . [1]

(e) (i) Trouvez la valeur de a . [4]

(ii) À partir de là, trouvez l'écart interquartile (EI). [4]

Les temps pour se rendre au travail inférieurs à p minutes sont considérés comme des valeurs aberrantes.

(f) Trouvez la valeur de p . [2]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

8. [Note maximale : 16]

Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 17$.

(a) Trouvez $f'(x)$. [2]

La représentation graphique de f a des tangentes horizontales aux points où $x = a$ et $x = b$, $a < b$.

(b) Trouvez la valeur de a et la valeur de b . [3]

(c) (i) Esquissez la représentation graphique de $y = f'(x)$.

(ii) À partir de là, expliquez pourquoi la représentation graphique de f a un maximum relatif au point où $x = a$. [2]

(d) (i) Trouvez $f''(b)$.

(ii) À partir de là, utilisez votre réponse de la partie (d)(i) pour montrer que la représentation graphique de f a un minimum relatif au point où $x = b$. [4]

La normale à la représentation graphique de f en $x = a$ et la tangente à la représentation graphique de f en $x = b$ se croisent au point $(p ; q)$.

(e) Trouvez la valeur de p et la valeur de q . [5]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

9. [Note maximale : 16]

Soit $f(x) = \frac{\ln 5x}{kx}$, où $x > 0$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Montrez que $f'(x) = \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$. [3]

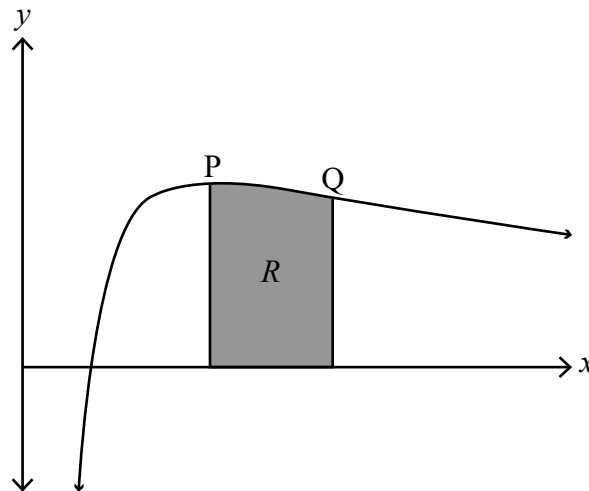
La représentation graphique de f a exactement un maximum au point P.

(b) Trouvez l'abscisse de P. [3]

La dérivée seconde de f est donnée par $f''(x) = \frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3}$. La représentation graphique de f a exactement un point d'inflexion Q.

(c) Montrez que l'abscisse de Q est $\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}$. [3]

La région R est délimitée par la représentation graphique de f , l'axe des abscisses et les droites verticales passant par le point maximum P et le point d'inflexion Q.



(d) Étant donné que l'aire de R est 3, trouvez la valeur de k . [7]



Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne
seront pas corrigées.



12EP12

Barème de notation

Spécimen d'épreuve

Mathématiques : analyse et approches

Niveau moyen

Épreuve 1

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

*Attribuez des points à l'aide des annotations tel qu'indiqué dans le barème de notation, par exemple **M1**, **A2**.*

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- En règle générale, il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **A1**, étant donné que les points **A** dépendent des éventuels points **M** qui précèdent.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, par exemple **M1A1**, cela signifie habituellement **M1** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple, substitution dans une formule) et **A1** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Si deux points **A** ou plus sont marqués sur la même ligne, ils peuvent être attribués de façon indépendante ; par exemple, si la première valeur est incorrecte, mais que les deux suivantes sont correctes, attribuez **A0A1A1**.
- Lorsque le barème de notation précise **M2**, **A2**, etc., **ne fractionnez pas** ces points (sauf indication contraire dans une remarque).
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit. Cependant, si le raisonnement qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier **A1**. Les réponses numériques peuvent néanmoins être une exception, dans le cas où une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Par contre, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une partie ultérieure et que le raisonnement montré est correct, attribuez des points de suivi **FT**, mais n'attribuez pas le dernier **A1** dans cette partie.

Exemples :

	Réponse correcte vue	Raisonnement additionnel vu	Action
1.	$8\sqrt{2}$	5,656 85... (valeur décimale incorrecte)	Attribuer le dernier A1 (ignorer le raisonnement additionnel)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	Ne pas attribuer le dernier A1
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	Ne pas attribuer le dernier A1

3 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses, par exemple (M1)**, et peuvent seulement être attribués si un raisonnement **correct** est vu ou si ce dernier est implicite dans le raisonnement subséquent.

- Normalement, le raisonnement correct est vu ou implicite dans la prochaine ligne de la démarche.
- Des points **sans** parenthèses ne peuvent être attribués que pour un raisonnement qui est **vu**.

4 Points de suivi (attribués uniquement suite à une erreur du candidat)

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes** ou sous-partie(s). En règle générale, pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente**. Cependant, si une sous-partie se voit attribuer des points uniquement pour la réponse (c'est-à-dire qu'aucun raisonnement n'est indiqué), alors des points **FT** doivent être attribués le cas échéant.

- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une **erreur** est commise, aucun autre point **A** ne peut être attribué au travail faisant intervenir l'erreur, mais des points **M** peuvent être attribués, le cas échéant.
- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, utilisation de $r > 1$ pour la somme d'une série géométrique infinie, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Le mot « leur » peut apparaître dans une description du barème de notation afin d'indiquer la possibilité que les candidats utilisent une valeur incorrecte.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.
- Si un candidat commet une erreur dans une partie, mais obtient une ou des réponses correctes dans la ou les parties suivantes, attribuez les points appropriés, sauf indication contraire dans la question. Une approche différente ne dépendant pas des réponses aux parties précédentes peut souvent être utilisée dans les parties suivantes.

5 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquez une pénalité **MR** de 1 point pour cette question.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Si un candidat copie incorrectement son propre travail, cela ne constitue **pas** une erreur de lecture, il s'agit d'une erreur.
- La pénalité **MR** ne peut être appliquée que lorsque le raisonnement est vu. Pour les questions avec la calculatrice, sans raisonnement et avec des réponses incorrectes, les examinateurs ne doivent **pas** présumer que les valeurs ont été mal lues.

6 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **SOIT . . . OU**.

7 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens), apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

8 Précision des réponses

Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera attribué si la réponse est fournie avec le niveau de précision requis. Il y a deux types d'erreurs de précision et le point pour la réponse finale ne doit pas être attribué si ces erreurs surviennent.

- **Erreurs d'arrondi** : concerne uniquement les réponses finales, pas les étapes intermédiaires.
- **Niveau de précision** : lorsque cela n'est pas spécifié dans la question, la règle générale s'applique aux réponses finales : *sauf en cas d'indication contraire contenue dans la question, les candidats doivent toujours fournir des réponses numériques exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.*

9 Calculatrices

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée. L'utilisation d'une calculatrice pour l'épreuve 1 est une mauvaise pratique, et aucun point ne sera accordé. Si vous voyez des parties de travail qui laissent croire qu'un candidat à utiliser une calculatrice, suivez la procédure en cas de mauvaise pratique. Exemple : trouver un rapport trigonométrique de 0,423 5.

Section A

1. (a) approche valide en utilisant l'identité de Pythagore

(M1)

$$\sin^2 A + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 \text{ (ou l'équivalent)}$$

(A1)

$$\sin A = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

A1

[3 points]

- (b) $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{11}}{6}$ (ou l'équivalent)

(A1)

$$\text{aire} = 4\sqrt{11}$$

A1

[2 points]

Total [5 points]

2. tenter de substituer dans $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(M1)

Note : Accepter l'utilisation d'un diagramme de Venn ou toute autre méthode valide.

$$0,6 = 0,5 + 0,4 - P(A \cap B)$$

(A1)

$$P(A \cap B) = 0,3 \text{ (vu n'importe où)}$$

A1

$$\text{tenter de substituer dans } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(M1)

$$= \frac{0,3}{0,4}$$

$$P(A|B) = 0,75 \left(= \frac{3}{4} \right)$$

A1

Total [5 points]

3. (a) tenter de développer le membre de gauche (M1)
 MEMBRE DE GAUCHE = $(4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1)$ A1
 $= 8n^2 + 2 (= \text{MEMBRE DE DROITE})$ AG
 [2 points]
- (b) **MÉTHODE 1**
 reconnaître que $2n - 1$ et $2n + 1$ représentent deux entiers impairs consécutifs R1
 (pour $n \in \mathbb{Z}$)
 $8n^2 + 2 = 2(4n^2 + 1)$ A1
 raison valide, *par exemple* divisible par 2 (2 est un facteur) R1
 la somme des carrés de deux entiers impairs consécutifs est donc paire AG
 [3 points]
- MÉTHODE 2**
 reconnaître, *par exemple*, que n et $n + 2$ représentent deux entiers impairs consécutifs R1
 (pour $n \in \mathbb{Z}$)
 $n^2 + (n + 2)^2 = 2(n^2 + 2n + 2)$ A1
 raison valide, *par exemple* divisible par 2 (2 est un facteur) R1
 la somme des carrés de deux entiers impairs consécutifs est donc paire AG
 [3 points]
- Total [5 points]
4. tenter d'intégrer (M1)
 $u = 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x$
 $\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}} du$ (A1)
- SOIT**
 $= 4\sqrt{u} (+C)$ A1
- OU**
 $= 4\sqrt{2x^2 + 1} (+C)$ A1
- ALORS**
 substitution correcte dans leur primitive (C doit apparaître) (M1)
 $5 = 4 + C \Rightarrow C = 1$
 $f(x) = 4\sqrt{2x^2 + 1} + 1$ A1
 Total [5 points]

5. (a) tenter de former la composition **M1**
 substitution correcte $g\left(\frac{x+3}{4}\right) = 8\left(\frac{x+3}{4}\right) + 5$ **A1**
 $(g \circ f)(x) = 2x + 11$ **AG**
[2 points]
- (b) tenter de substituer 4 (vu n'importe où) **(M1)**
 équation correcte $a = 2 \times 4 + 11$ **(A1)**
 $a = 19$ **A1**
[3 points]

Total [5 points]

6. (a) tenter d'utiliser la règle de changement de base **M1**
 $\log_9(\cos 2x + 2) = \frac{\log_3(\cos 2x + 2)}{\log_3 9}$ **A1**
 $= \frac{1}{2} \log_3(\cos 2x + 2)$ **A1**
 $= \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$ **AG**
[3 points]
- (b) $\log_3(2 \sin x) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$
 $2 \sin x = \sqrt{\cos 2x + 2}$ **M1**
 $4 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (ou l'équivalent) **A1**
 utiliser $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ **(M1)**
 $6 \sin^2 x = 3$
 $\sin x = (\pm) \frac{1}{\sqrt{2}}$ **A1**
 $x = \frac{\pi}{4}$ **A1**

Note : Attribuer **A0** si d'autres solutions que $x = \frac{\pi}{4}$ sont données.

[5 points]

Total [8 points]

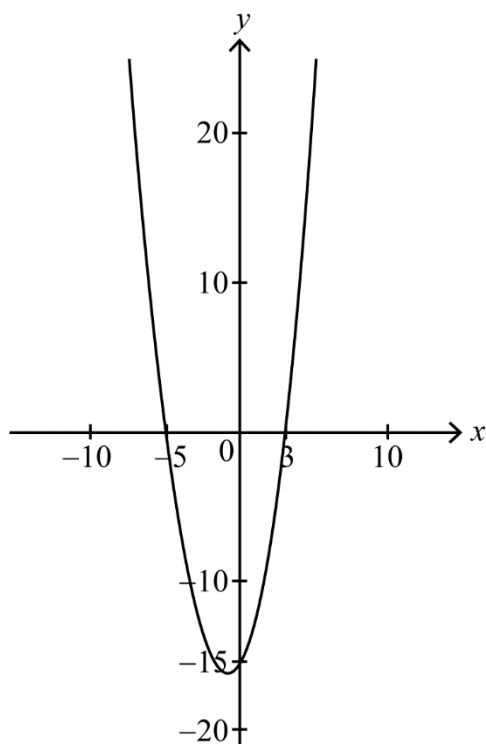
Section B

7. (a) preuve de la position de la médiane (M1)
80^e employé A1
40 minutes [2 points]
- (b) tentative valide pour trouver l'intervalle (25–55) (M1)
18 (employés), 142 (employés) A1
124 A1
[3 points]
- (c) reconnaître qu'il y a 16 employés dans le 10 % supérieur (M1)
144 employés ont pris moins que k minutes (A1)
 $k = 56$ A1
[3 points]
- (d) $b = 70$ A1
[1 points]
- (e) (i) reconnaître a comme étant la valeur du premier quartile (M1)
40 employés A1
 $a = 33$
- (ii) $47 - 33$ (M1)
 $EI = 14$ A1
[4 points]
- (f) tenter de trouver $1,5 \times \text{leur EI}$ (M1)
 $33 - 21$
12 (A1)
[2 points]
- [Total 15 points]
8. (a) $f'(x) = x^2 + 2x - 15$ (M1)A1
[2 points]
- (b) raisonnement correct du fait que $f'(x) = 0$ (vu n'importe où) (M1)
 $x^2 + 2x - 15 = 0$
approche valide pour résoudre une équation quadratique M1
 $(x - 3)(x + 5)$, formule quadratique
valeurs correctes pour x
3, -5
valeurs correctes pour a et b
 $a = -5$ et $b = 3$ A1
[3 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 8

(c) (i)



A1

(ii) la dérivée première change de positive à négative en $x = a$

A1

donc, maximum relatif en $x = a$

AG

[2 points]

(d) (i) $f''(x) = 2x + 2$

A1

substituer **leur** b dans **leur** dérivée seconde

(M1)

$$f''(3) = 2 \times 3 + 2$$

$$f''(b) = 8$$

(A1)

(ii) $f''(b)$ est positive, donc la représentation graphique est concave vers le haut

R1

donc, minimum relatif en $x = b$

AG

[4 points]

(e) la normale à f en $x = a$ est $x = -5$ (vu n'importe où)

(A1)

tenter de trouver l'ordonnée correspondant à leur valeur de b

(M1)

$$f(3) = -10$$

(A1)

l'équation de la tangente en $x = b$ est $y = -10$ (vu n'importe où)

A1

intersection au point $(-5, -10)$

$$p = -5 \text{ et } q = -10$$

A1

[5 points]

[Total 16 points]

9. (a) tenter d'utiliser la règle du quotient
substitution correcte dans la règle du quotient

(M1)

$$f'(x) = \frac{5kx\left(\frac{1}{5x}\right) - k \ln 5x}{(kx)^2} \quad (\text{ou l'équivalent})$$

A1

$$= \frac{k - k \ln 5x}{k^2 x^2}, (k \in \mathbb{R}^+)$$

A1

$$= \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$$

AG

[3 points]

(b) $f'(x) = 0$

M1

$$\frac{1 - \ln 5x}{kx^2} = 0$$

$$\ln 5x = 1$$

(A1)

$$x = \frac{e}{5}$$

A1

[3 points]

(c) $f''(x) = 0$

M1

$$\frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3} = 0$$

$$\ln 5x = \frac{3}{2}$$

A1

$$5x = e^{\frac{3}{2}}$$

A1

le point d'inflexion est donc situé en $x = \frac{1}{5} e^{\frac{3}{2}}$

AG

[3 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 9

(d) tenter d'intégrer (M1)

$$u = \ln 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln 5x}{kx} dx = \frac{1}{k} \int u du \quad \text{(A1)}$$

SOIT

$$= \frac{u^2}{2k} \quad \text{A1}$$

$$\text{donc } \frac{1}{k} \int_1^{\frac{3}{2}} u du = \left[\frac{u^2}{2k} \right]_1^{\frac{3}{2}} \quad \text{A1}$$

OU

$$= \frac{(\ln 5x)^2}{2k} \quad \text{A1}$$

$$\text{donc } \int_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \frac{\ln 5x}{kx} dx = \left[\frac{(\ln 5x)^2}{2k} \right]_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \quad \text{A1}$$

ALORS

$$= \frac{1}{2k} \left(\frac{9}{4} - 1 \right)$$

$$= \frac{5}{8k} \quad \text{A1}$$

poser leur expression pour l'aire égale à 3 M1

$$\frac{5}{8k} = 3$$

$$k = \frac{5}{24} \quad \text{A1}$$

[7 points]

Total [16 points]

**Mathématiques : analyse et approches**
Niveau moyen
Épreuve 2

Spécimen d'épreuve

Numéro de session du candidat

1 heure 30 minutes

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instructions to candidates

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.



Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Une sphère en métal a un rayon de 12,7 cm.

- (a) Trouvez le volume de la sphère, en exprimant votre réponse sous la forme $a \times 10^k$, $1 \leq a < 10$ et $k \in \mathbb{Z}$.

[3]

La sphère doit être fondue et remoulée sous la forme d'un cône de hauteur 14,8 cm.

- (b) Trouvez le rayon de la base du cône, avec une précision de 2 chiffres significatifs.

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

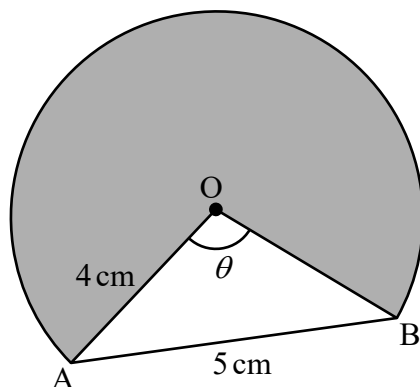
.....

.....



2. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre une partie d'un cercle de centre O et de rayon mesurant 4 cm .



La corde AB a une longueur de 5 cm et $\widehat{AOB} = \theta$.

(a) Trouvez la valeur de θ , en donnant votre réponse en radians. [3]

(b) Trouvez l'aire de la région ombragée. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Note maximale : 6]

Le 1^{er} janvier 2020, Laurie investit $P\$$ dans un compte qui rapporte un taux d'intérêt annuel nominal de 5,5 %, composé **trimestriellement**.

Le montant d'argent dans le compte de Laurie **à la fin de chaque année** suit une suite géométrique de raison r .

(a) Trouvez la valeur de r , en donnant votre réponse avec quatre chiffres significatifs. [3]

Laurie n'effectue aucun autre dépôt dans le compte ni aucun autre retrait.

(b) Trouvez en quelle année le montant d'argent dans le compte de Laurie sera égal au double du montant qu'elle a investi. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Note maximale : 6]

Un dé biaisé à six faces est pondéré de telle sorte que la probabilité d'obtenir un « six » est de $\frac{7}{10}$.

Le dé est lancé cinq fois. Trouvez la probabilité d'obtenir

(a) au plus trois « six ». [3]

(b) le troisième « six » au cinquième lancer. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Note maximale : 5]

Le tableau suivant montre les notes obtenues par sept élèves à deux examens de mathématiques différents.

Examen 1 (x)	15	23	25	30	34	34	40
Examen 2 (y)	20	26	27	32	35	37	35

Soit L_1 la droite de régression de x sur y . L'équation de la droite L_1 peut s'écrire sous la forme $x = ay + b$.

(a) Trouvez la valeur de a et la valeur de b . [2]

Soit L_2 la droite de régression de y sur x . Les droites L_1 et L_2 passent par le même point ayant pour coordonnées $(p ; q)$.

(b) Trouvez la valeur de p et la valeur de q . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Note maximale : 7]

Le déplacement, en centimètres, d'une particule à partir d'une origine, O, au temps t secondes, est donné par $s(t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq 5$.

(a) Trouvez la distance maximale de la particule par rapport à O. [3]

(b) Trouvez l'accélération de la particule à l'instant où elle change de direction pour la première fois. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

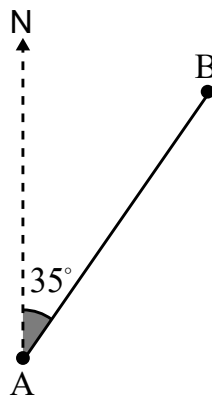
Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

7. [Note maximale : 16]

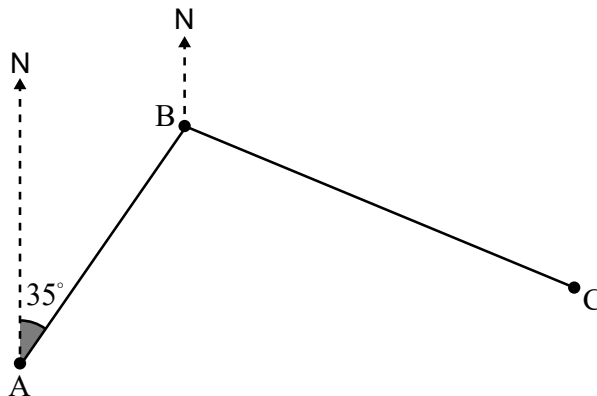
Adam part pour une randonnée à partir de son camp, situé au point A. Il marche à une vitesse moyenne de 4,2 km/h pour 45 minutes, avec un relèvement de 035° par rapport au camp, jusqu'au moment où il s'arrête pour prendre une pause au point B.

(a) Trouvez la distance entre le point A et le point B.

[2]



Adam quitte le point B suivant un relèvement de 114° et continue à marcher sur une distance de 4,6 km jusqu'à se rendre au point C.



(b) (i) Montrez que $\hat{ABC}$ est 101° .

(ii) Trouvez la distance entre le camp et le point C.

[5]

(c) Trouvez $\hat{BCA}$.

[3]

(Suite de la question à la page suivante)



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 7)

Jacob, un ami d'Adam, veut marcher à partir du camp pour rejoindre directement Adam au point C.

- (d) Trouvez le relèvement que Jacob doit emprunter par rapport au point C. [3]

Jacob marche à une vitesse moyenne de 3,9 km/h.

- (e) Trouvez, à la minute la plus près, le temps que cela prendra à Jacob pour rejoindre le point C. [3]

8. [Note maximale : 15]

La longueur, X mm, d'une certaine espèce de coquillage est distribuée normalement avec une moyenne de 25 et une variance de σ^2 .

La probabilité que X soit inférieure à 24,15 est de 0,1446.

- (a) Trouvez $P(24,15 < X < 25)$. [2]

- (b) (i) Trouvez σ , l'écart type de X .

- (ii) À partir de là, trouvez la probabilité qu'un coquillage choisi au hasard ait une longueur supérieure à 26 mm. [5]

Un échantillon aléatoire de 10 coquillages est recueilli sur une plage. Soit Y , le nombre de coquillages dont la longueur est supérieure à 26 mm.

- (c) Trouvez $E(Y)$. [3]

- (d) Trouvez la probabilité qu'exactement trois de ces coquillages aient une longueur supérieure à 26 mm. [2]

Un coquillage choisi au hasard a une longueur inférieure à 26 mm.

- (e) Trouvez la probabilité que sa longueur soit entre 24,15 mm and 25 mm. [3]



N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

9. [Note maximale : 13]

Considérez une fonction f , telle que $f(x) = 5,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x+1)\right) + b$, $0 \leq x \leq 10$, $b \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez la période de f . [2]

La fonction f possède un maximum relatif au point $(2 ; 21,8)$ et un minimum relatif au point $(8 ; 10,2)$.

(b) (i) Trouvez la valeur de b .

(ii) À partir de là, trouvez la valeur de $f(6)$. [4]

Une deuxième fonction g est donnée par $g(x) = p \sin\left(\frac{2\pi}{9}(x - 3,75)\right) + q$, $0 \leq x \leq 10$; $p, q \in \mathbb{R}$.

La fonction g passe par les points $(3 ; 2,5)$ et $(6 ; 15,1)$.

(c) Trouvez la valeur de p et la valeur de q . [5]

(d) Trouvez la valeur de x pour laquelle les fonctions ont la plus grande différence. [2]



Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne
seront pas corrigées.



12EP11

Veillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne
seront pas corrigées.



12EP12

Barème de notation

Spécimen d'épreuve

Mathématiques : analyse et approches

Niveau moyen

Épreuve 2

Instructions pour les examinateurs

Abréviations

- M** Points attribués pour avoir tenté d'utiliser une **méthode** correcte.
- A** Points attribués pour une **réponse** ou pour la **précision** ; souvent ils dépendent des points **M** qui précèdent.
- R** Points attribués pour un **raisonnement** clair.
- AG** La réponse est donnée dans la question et, par conséquent, aucun point n'est attribué.

Utilisation du barème

1 Généralités

*Attribuez des points à l'aide des annotations tel qu'indiqué dans le barème de notation, par exemple **M1**, **A2**.*

2 Points pour la méthode et la réponse/précision

- **N'attribuez pas** automatiquement la totalité des points pour une réponse correcte ; tout le travail **doit** être vérifié, et les points attribués selon le barème de notation.
- En règle générale, il n'est pas possible d'attribuer **M0** suivi de **A1**, étant donné que les points **A** dépendent des éventuels points **M** qui précèdent.
- Lorsque des points **M** et des points **A** sont marqués sur la même ligne, par exemple **M1A1**, cela signifie habituellement **M1** pour **tenter** d'utiliser une méthode appropriée (par exemple, substitution dans une formule) et **A1** pour l'utilisation des valeurs **correctes**.
- Si deux points **A** ou plus sont marqués sur la même ligne, ils peuvent être attribués de façon indépendante ; par exemple, si la première valeur est incorrecte, mais que les deux suivantes sont correctes, attribuez **A0A1A1**.
- Lorsque le barème de notation précise **M2**, **A2**, etc., **ne fractionnez pas** ces points (sauf indication contraire dans une remarque).
- Lorsque la réponse correcte à une question ou à une partie de question est vue, ignorez le travail qui suit. Cependant, si le raisonnement qui suit indique un manque de compréhension mathématique, n'attribuez pas le dernier **A1**. Les réponses numériques peuvent néanmoins être une exception, dans le cas où une valeur exacte correcte est suivie d'une valeur décimale incorrecte. Par contre, si la valeur décimale incorrecte est utilisée dans une partie ultérieure et que le raisonnement montré est correct, attribuez des points de suivi **FT**, mais n'attribuez pas le dernier **A1** dans cette partie.

Exemples :

	Réponse correcte vue	Raisonnement additionnel vu	Action
1.	$8\sqrt{2}$	5,656 85... (valeur décimale incorrecte)	Attribuer le dernier A1 (ignorer le raisonnement additionnel)
2.	$\frac{1}{4} \sin 4x$	$\sin x$	Ne pas attribuer le dernier A1
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	Ne pas attribuer le dernier A1

3 Points implicites

Les points implicites apparaissent entre **parenthèses, par exemple (M1)**, et peuvent seulement être attribués si un raisonnement **correct** est vu ou si ce dernier est implicite dans le raisonnement subséquent.

- Normalement, le raisonnement correct est vu ou implicite dans la prochaine ligne de la démarche.
- Des points **sans** parenthèses ne peuvent être attribués que pour un raisonnement qui est **vu**.

4 Points de suivi (attribués uniquement suite à une erreur du candidat)

Les points de suivi (**FT**) sont accordés lorsqu'une réponse incorrecte d'une **partie** d'une question est correctement utilisée dans les parties **suivantes** ou sous-partie(s). En règle générale, pour accorder des points **FT**, **il faut que les étapes du travail soient présentées et pas seulement la réponse finale, calculée à partir d'une réponse incorrecte d'une partie précédente**. Cependant, si une sous-partie se voit attribuer des points uniquement pour la réponse (c'est-à-dire qu'aucun raisonnement n'est indiqué), alors des points **FT** doivent être attribués le cas échéant.

- À l'intérieur d'une partie de question, une fois qu'une **erreur** est commise, aucun autre point **A** ne peut être attribué au travail faisant intervenir l'erreur, mais des points **M** peuvent être attribués, le cas échéant.
- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur, accordez alors moins de points **FT** à votre discrétion.
- Si l'erreur conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, utilisation de $r > 1$ pour la somme d'une série géométrique infinie, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Le mot « leur » peut apparaître dans une description du barème de notation afin d'indiquer la possibilité que les candidats utilisent une valeur incorrecte.
- Les exceptions à cette règle seront notées explicitement dans le barème de notation.
- Si un candidat commet une erreur dans une partie, mais obtient une ou des réponses correctes dans la ou les parties suivantes, attribuez les points appropriés, sauf indication contraire dans la question. Une approche différente ne dépendant pas des réponses aux parties précédentes peut souvent être utilisée dans les parties suivantes.

5 Erreurs de lecture

*Si un candidat copie incorrectement les informations à propos d'une question, ceci est une erreur de lecture (**MR**). Appliquez une pénalité **MR** de 1 point pour cette question.*

- Si la question devient une question beaucoup plus simple à cause d'une erreur de lecture **MR**, accordez alors moins de points à votre discrétion.
- Si l'erreur de lecture **MR** conduit à une valeur inappropriée (par exemple, probabilité supérieure à 1, $\sin \theta = 1,5$, valeur non entière lorsqu'un nombre entier est requis), n'attribuez pas le(s) point(s) pour la(les) réponse(s) finale(s).
- Si un candidat copie incorrectement son propre travail, cela ne constitue **pas** une erreur de lecture, il s'agit d'une erreur.
- La pénalité **MR** ne peut être appliquée que lorsque le raisonnement est vu. Pour les questions avec la calculatrice, sans raisonnement et avec des réponses incorrectes, les examinateurs ne doivent **pas** présumer que les valeurs ont été mal lues.

6 Méthodes alternatives

Les candidats utiliseront quelquefois des méthodes autres que celles du barème de notation. À moins que la question impose une méthode, les autres méthodes correctes doivent être notées en cohérence avec le barème de notation.

- Des méthodes alternatives pour une question complète sont indiquées par **MÉTHODE 1**, **MÉTHODE 2**, etc.
- Des solutions alternatives pour une partie de question sont indiquées par **SOIT . . . OU**.

7 Formes alternatives

*Sauf si la question impose une forme particulière, **acceptez** les formes équivalentes.*

- Puisqu'il s'agit d'un examen international, acceptez toutes les formes alternatives de **notations**.
- Dans le barème de notation, les formes **numériques** et **algébriques** équivalentes seront généralement écrites entre parenthèses immédiatement après la réponse.
- Dans le barème de notation, les réponses **simplifiées** (que souvent les candidats n'écrivent pas dans les examens), apparaîtront généralement entre parenthèses. Les points doivent être attribués, soit pour la réponse précédant les parenthèses, soit pour la réponse entre parenthèses (si elle est visible).

8 Précision des réponses

Si le niveau de précision est spécifié dans la question, un point sera attribué si la réponse est fournie avec le niveau de précision requis. Il y a deux types d'erreurs de précision et le point pour la réponse finale ne doit pas être attribué si ces erreurs surviennent.

- **Erreurs d'arrondi** : concerne uniquement les réponses finales, pas les étapes intermédiaires.
- **Niveau de précision** : lorsque cela n'est pas spécifié dans la question, la règle générale s'applique aux réponses finales : *sauf en cas d'indication contraire contenue dans la question, les candidats doivent toujours fournir des réponses numériques exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.*

9 Calculatrices

L'utilisation d'une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve, mais les calculatrices équipées de fonctions de manipulation symbolique ne sont pas autorisées.

Notations propres aux calculatrices

Dans le Guide de mathématiques, il est indiqué que :

Les élèves doivent toujours utiliser des notations mathématiques correctes et non les notations qui peuvent apparaître sur leur calculatrice.

N'acceptez **pas** les réponses finales écrites à l'aide de notations propres aux calculatrices. Cependant, ne pénalisez pas l'utilisation de notations propres aux calculatrices dans le raisonnement.

Section A

1. (a) $\frac{4}{3}\pi(12,7)^3$ (ou l'équivalent) A1
 $8580,24$ (A1)
 $V = 8,58 \times 10^3$ A1
[3 points]
- (b) reconnaître que le volume du cône est le même que le volume de leur sphère (M1)
 $\frac{1}{3}\pi r^2(14,8) = 8580,24$ (ou l'équivalent) A1
 $r = 23,529$
 $r = 24$ (cm) correct avec 2 chiffres significatifs A1
[3 points]
- Total [6 points]**
2. (a) **MÉTHODE 1**
- tenter d'utiliser la loi des cosinus (M1)
 $\cos \theta = \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 4}$ (ou l'équivalent) A1
 $\theta = 1,35$ A1
[3 points]
- MÉTHODE 2**
- tenter de séparer le triangle AOB en deux triangles rectangles congrus (M1)
 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2,5}{4}$ A1
 $\theta = 1,35$ A1
[3 points]
- (b) tenter de trouver l'aire de la région ombragée (M1)
 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times (2\pi - 1,35\dots)$ A1
 $= 39,5 \text{ (cm}^2\text{)}$ A1
[3 points]
- Total [6 points]**
3. (a) $\left(1 + \frac{5,5}{4 \times 100}\right)^4$ (M1)(A1)
 $= 1,056$ A1
[3 points]

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 3

(b) **SOIT**

$$2P = P \times \left(1 + \frac{5,5}{100 \times 4}\right)^{4n} \quad \text{OU} \quad 2P = P \times (\text{leur } (a))^m \quad (M1)(A1)$$

Note : Attribuer **(M1)** pour avoir substitué dans la formule de remboursement d'un prêt. Attribuer **(A1)** pour une substitution correcte.

OU

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 5,5$$

$$P/Y = 4$$

$$C/Y = 4$$

$$n = 50,756\dots$$

(M1)(A1)

OU

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 100(\text{leur } (a) - 1)$$

$$P/Y = 1$$

$$C/Y = 1$$

(M1)(A1)

ALORS

$$\Rightarrow 12,7 \text{ ans}$$

Laurie aura doublé le montant qu'elle a investi au cours de 2032

A1

[3 points]

Total [6 points]

4. (a) reconnaître une binomiale

$$X \sim B(5 ; 0,7)$$

tenter de trouver $P(X \leq 3)$

$$= 0,472 (= 0,47178)$$

(M1)

M1

A1

[3 points]

(b) reconnaître qu'il y a eu 2 « six » en 4 lancers

(M1)

$$P(3^{\text{e}} \text{ « six » au } 5^{\text{e}} \text{ lancer}) = \left[\binom{4}{2} \times (0,7)^2 \times (0,3)^2 \right] \times 0,7 (= 0,2646 \times 0,7)$$

A1

$$= 0,185 (= 0,18522)$$

A1

[3 points]

Total [6 points]

5. (a) $a = 1,29$ et $b = -10,4$ **A1A1**
[2 points]
- (b) reconnaître que les deux droites passent par le point moyen **(M1)**
A2
[3 points]
 $p = 28,7$, $q = 30,3$
Total [5 points]
6. (a) utiliser une représentation graphique pour trouver les coordonnées du minimum relatif **(M1)**
(A1)
A1
[3 points]
 $s = -16,513...$
distance maximale est 16,5 cm (à gauche de O)
- (b) tenter de trouver l'instant auquel la particule change de direction, en considérant *par exemple*, le premier maximum de la représentation graphique de s ou la valeur de t au premier point d'intersection de la représentation graphique de s' avec l'axe des abscisses. **(M1)**
(A1)
 $t = 1,51986...$
tenter de trouver la pente de s' pour leur valeur de t , $s''(1,51986...)$ **(M1)**
A1
[4 points]
 $= -8,92 \text{ (cm/s}^2\text{)}$
Total [7 points]

Section B

7. (a) $\frac{4,2}{60} \times 45$ A1
 $AB = 3,15 \text{ (km)}$ A1
[2 points]
- (b) (i) 66° ou $(180 - 114)$ A1
 $35 + 66$ A1
 $\hat{ABC} = 101^\circ$ AG
- (ii) tenter d'utiliser la loi des cosinus (M1)
 $AC^2 = 3,15^2 + 4,6^2 - 2 \times 3,15 \times 4,6 \cos 101^\circ$ (ou l'équivalent) A1
 $AC = 6,05 \text{ (km)}$ A1
[5 points]
- (c) approche valide pour trouver l'angle BCA (M1)
par exemple, la loi des sinus
 substitution correcte dans la loi des sinus A1
par exemple, $\frac{\sin(\hat{BCA})}{3,15} = \frac{\sin(101^\circ)}{6,0507...}$
 $\hat{BCA} = 30,7^\circ$ A1
[3 points]
- (d) $\hat{BAC} = 48,267$ (vu n'importe où) A1
 approche valide pour trouver le relèvement correct (M1)
par exemple, $48,267 + 35$
 relèvement = $83,3^\circ$ (accepter 083°) A1
[3 points]
- (e) tenter d'utiliser $\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$ M1
 $\frac{6,0507}{3,9}$ ou $0,065768 \text{ km/min}$ (A1)
 $t = 93 \text{ (minutes)}$ A1
[3 points]

Total [16 points]

8. (a) tenter d'utiliser la symétrie d'une courbe normale (M1)
par exemple, diagramme, $0,5 - 0,1446$
 $P(24,15 < X < 25) = 0,3554$ A1
 [2 points]
- (b) (i) utiliser le calcul inverse d'une normale pour trouver la cote z (M1)
 $z = -1,0598$
 substitution correcte $\frac{24,15 - 25}{\sigma} = -1,0598$ (A1)
 $\sigma = 0,802$ A1
- (ii) $P(X > 26) = 0,106$ (M1)A1
 [5 points]
- (c) reconnaître une probabilité binomiale (M1)
 $E(Y) = 10 \times 0,10621$ (A1)
 $= 1,06$ A1
 [3 points]
- (d) $P(Y = 3)$ (M1)
 $= 0,0655$ A1
 [2 points]
- (e) reconnaître une probabilité conditionnelle (M1)
 substitution correcte A1
 $\frac{0,3554}{1 - 0,10621}$
 $= 0,398$ A1
 [3 points]
- Total [15 points]**
9. (a) approche correcte A1
par exemple, $\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{\text{période}}$ (ou l'équivalent)
 période = 12 A1
 [2 points]
- (b) (i) approche valide (M1)
par exemple, $\frac{\max + \min}{2}$ $b = \max - \text{amplitude}$
 $\frac{21,8 + 10,2}{2}$, ou l'équivalent
 $b = 16$ A1

suite de la question à la page suivante...

Suite de la question 9

- (ii) tenter de substituer dans **leur** fonction **(M1)**

$$5,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(6+1)\right) + 16$$

$$f(6) = 13,1$$

A1

[4 points]

- (c) tentative valide de poser un système d'équations
deux équations correctes

(M1)

A1

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{9}(3-3,75)\right) + q = 2,5, \quad p \sin\left(\frac{2\pi}{9}(6-3,75)\right) + q = 15,1$$

tentative valide de résoudre le système

(M1)

A1A1

[5 points]

- (d) tenter d'utiliser $|f(x) - g(x)|$ pour trouver la différence maximale
 $x = 1,64$

(M1)

A1

[2 points]

Total [13 points]
