



International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior y Medio

Exámenes de muestra 1, 2 y 3

Primeros exámenes en 2021

TABLA DE CONTENIDO

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Superior)
Examen de muestra de la prueba 1

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Superior)
Esquema de calificación de la prueba 1

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Superior)
Examen de muestra de la prueba 2

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Superior)
Esquema de calificación de la prueba 2

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Superior)
Examen de muestra de la prueba 3

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Superior)
Esquema de calificación de la prueba 3

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Medio)
Examen de muestra de la prueba 1

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Medio)
Esquema de calificación de la prueba 1

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Medio)
Examen de muestra de la prueba 2

Matemáticas: Análisis y Enfoques (Nivel Medio)
Esquema de calificación de la prueba 2

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 1

Examen de muestra

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas de **Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,6$.
Halle $P(A | B)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 5]

- (a) Muestre que $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, donde $n \in \mathbb{Z}$. [2]
- (b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, pruebe que la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualesquiera es par. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 5]

Sea $f'(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Sabiendo que $f(0) = 5$, halle $f(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

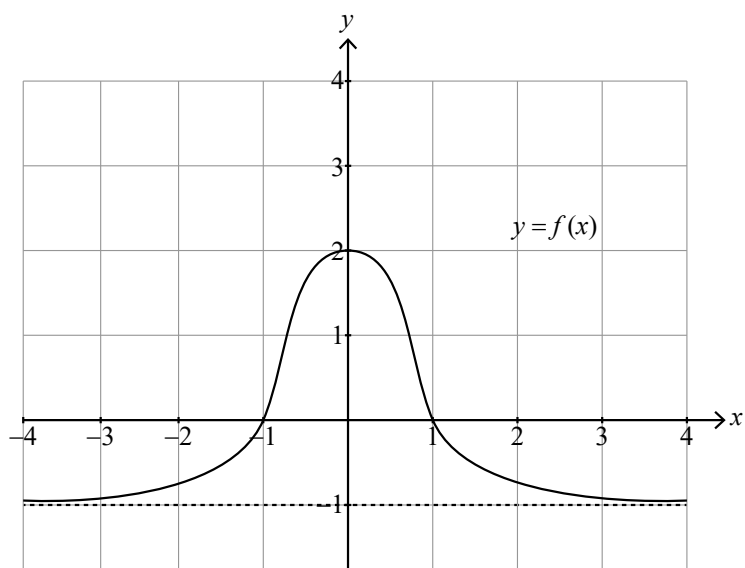
.....

.....

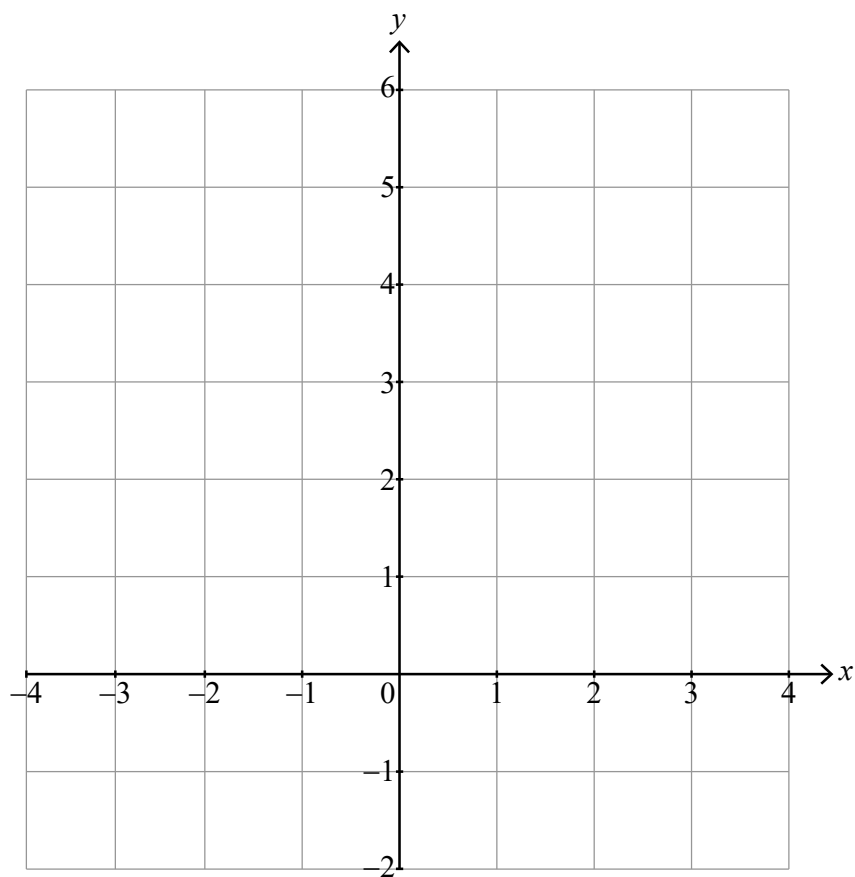


4. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente figura muestra el gráfico de $y = f(x)$. El gráfico tiene una asíntota horizontal en $y = -1$. El gráfico cruza el eje x en $x = -1$ y en $x = 1$, y el eje y en $y = 2$.



En los ejes de coordenadas que aparecen a continuación, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = [f(x)]^2 + 1$, mostrando claramente todas las asíntotas que haya —junto con sus correspondientes ecuaciones— y las coordenadas de todos los máximos o mínimos locales.



5. [Puntuación máxima: 5]

Las funciones f y g se definen del siguiente modo $f(x) = \frac{x+3}{4}$ y $g(x) = 8x+5$.

(a) Muestre que $(g \circ f)(x) = 2x + 11$. [2]

(b) Sabiendo que $(g \circ f)^{-1}(a) = 4$, halle el valor de a . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 8]

(a) Muestre que $\log_9 (\cos 2x + 2) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$. [3]

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, resuelva $\log_3 (2 \operatorname{sen} x) = \log_9 (\cos 2x + 2)$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 7]

Una variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{36} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right), & 0 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}.$$

Halle $P(0 \leq X \leq 3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Puntuación máxima: 7]

El plano Π tiene por ecuación cartesiana $2x + y + 2z = 3$.

La recta L tiene por ecuación vectorial $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ p \end{pmatrix}$, $\mu, p \in \mathbb{R}$. El ángulo agudo que forman la recta L y el plano Π mide 30° .

Halle los posibles valores de p .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

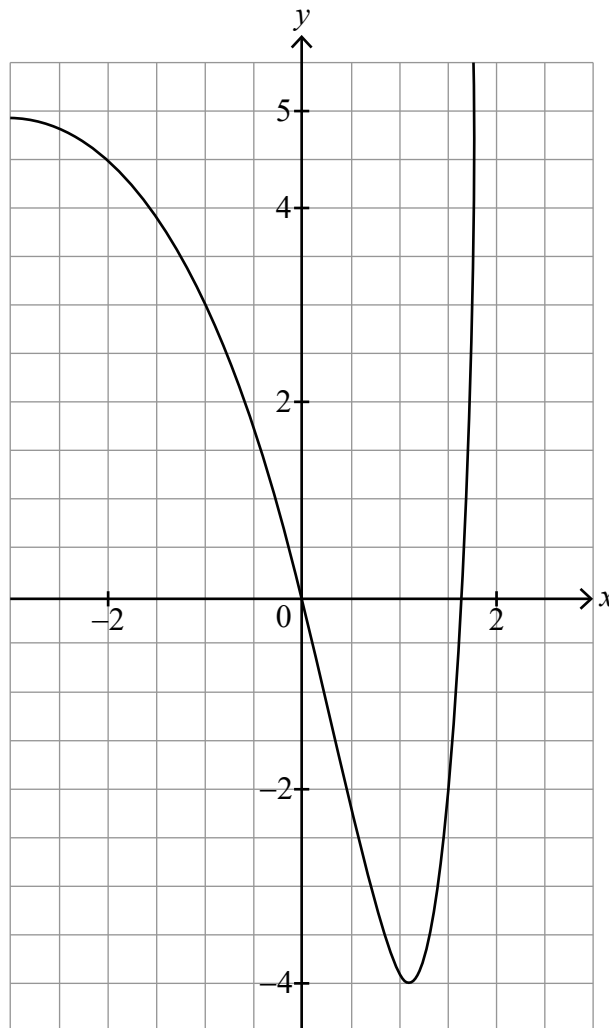
.....

.....



9. [Puntuación máxima: 8]

La función f se define así $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, $x \leq a$. El gráfico de $y = f(x)$ se muestra en la siguiente figura.



- (a) Halle el valor más grande de a para el cual f tiene función inversa. [3]
- (b) Para este valor de a , halle la expresión de $f^{-1}(x)$ e indique cuál es su dominio. [5]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 9: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP11

Véase al dorso

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

Sea $f(x) = \frac{\ln 5x}{kx}$, donde $x > 0$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Muestre que $f'(x) = \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$. [3]

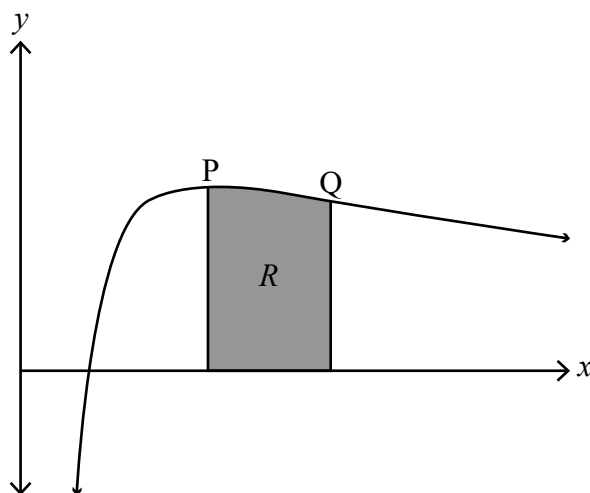
El gráfico de f tiene exactamente un máximo (el punto P).

(b) Halle la coordenada x de P. [3]

La derivada segunda de f viene dada por $f''(x) = \frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3}$. El gráfico de f tiene exactamente un punto de inflexión (Q).

(c) Muestre que la coordenada x de Q es $\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}$. [3]

La región R está delimitada por el gráfico de f , el eje x y las rectas verticales que pasan por el máximo P y por el punto de inflexión Q, respectivamente.



(d) Sabiendo que el área de R es igual a 3, halle el valor de k . [7]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 18]

- (a) Exprese $-3 + \sqrt{3}i$ de la forma $re^{i\theta}$, donde $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. [5]

Sean u , v y w las raíces de la ecuación $z^3 = -3 + \sqrt{3}i$.

- (b) Halle u , v y w exprese las respuestas de la forma $re^{i\theta}$, donde $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. [5]

En el diagrama de Argand, u , v y w están representados mediante los puntos U, V y W respectivamente.

- (c) Halle el área del triángulo UVW. [4]

- (d) Tomando como punto de partida la suma de las raíces u , v y w , muestre que $\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{7\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} = 0$. [4]

12. [Puntuación máxima: 21]

La función f se define así $f(x) = e^{\sin x}$.

- (a) Halle las dos primeras derivadas de $f(x)$ y, a partir de lo anterior, halle la serie de Maclaurin para $f(x)$ hasta (e incluido) el término en x^2 . [8]

- (b) Muestre que en dicha serie de Maclaurin para $f(x)$ el coeficiente de x^3 es cero. [4]

- (c) Utilizando las series de Maclaurin para $\arctan x$ y $e^{3x} - 1$, halle la serie de Maclaurin para $\arctan(e^{3x} - 1)$ hasta (e incluido) el término en x^3 . [6]

- (d) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, halle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\arctan(e^{3x} - 1)}$. [3]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



16EP14

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



16EP15

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



16EP16

Esquema de calificación

Examen de muestra

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 1

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*) ; a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

*Puntúe cada pregunta y cada apartado utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1**, **A2**.*

2 Puntos de método y puntos de respuesta/precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio (el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) y hay que puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si es que se ha concedido alguno).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: «se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**».
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea, se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2**, **N3**, etc., **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontremos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el procedimiento **correcto** (razonamiento seguido y cálculos realizados) o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento se haya **incluido por escrito explícitamente**.

4 Puntuaciones de arrastre de error (solo se aplican / se conceden después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés follow-through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados **posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **el alumno tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (es decir, los cálculos/razonamientos que ha seguido); no basta con que haya dado una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta que dio en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido en el apartado anterior la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de $r > 1$ para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizá estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la respuesta correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos dados en el enunciado de la pregunta, esto se considera un «error de lectura» (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar datos suyos (es decir, extraídos de su propio desarrollo), eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando el alumno ha incluido el desarrollo del ejercicio (cálculos y/o razonamientos). En aquellas preguntas de calculadora donde el alumno no ha incluido el desarrollo de la pregunta y ha dado además una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que lo que ha sucedido es que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

6 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar conforme a lo que indica el esquema de calificación.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos
MÉTODO 1,
MÉTODO 2, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN.**

7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

8 Precisión de las respuestas

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, en el esquema de calificación se incluirá un punto por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.*»

9 Calculadoras

No se permite el uso de calculadoras. El uso de cualquier tipo de calculadora durante la Prueba 1 se considera conducta fraudulenta y, como consecuencia de ello, no se le concederá al alumno ninguna calificación final. Si se topa con un ejercicio que sugiera que el alumno pudiera haber utilizado algún tipo de calculadora, siga por favor los procedimientos establecidos para abordar la conducta fraudulenta. Ejemplos: haber hallado un ángulo a partir de una razón trigonométrica de 0,4235.

Sección A

1. por intentar sustituir los valores en $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (M1)

Nota: Acepte el uso de diagramas de Venn u otro método válido.

$$0,6 = 0,5 + 0,4 - P(A \cap B) \quad (A1)$$

$$P(A \cap B) = 0,3 \text{ (incluido en algún lugar de la pregunta)} \quad A1$$

$$\text{por intentar sustituir los valores en } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (M1)$$

$$= \frac{0,3}{0,4}$$

$$P(A|B) = 0,75 \left(= \frac{3}{4} \right) \quad A1$$

Total [5 puntos]

2. (a) por tratar de desarrollar el miembro de la izquierda (M1)

$$\text{Miembro izda.} = (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) \quad A1$$

$$= 8n^2 + 2 (= \text{Miembro dcha.}) \quad AG$$

[2 puntos]

- (b) **MÉTODO 1**

por darse cuenta de que $2n-1$ y $2n+1$ representan dos enteros impares consecutivos (para $n \in \mathbb{Z}$) R1

$$8n^2 + 2 = 2(4n^2 + 1) \quad A1$$

una razón válida; *p. ej.*, divisible entre 2 (2 es un factor) R1

así pues, la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualquiera es par AG

[3 puntos]

MÉTODO 2

por darse cuenta, *p. ej.*, de que n y $n+2$ representan dos enteros impares consecutivos (para $n \in \mathbb{Z}$) R1

$$n^2 + (n+2)^2 = 2(n^2 + 2n + 2) \quad A1$$

una razón válida; *p. ej.*, divisible entre 2 (2 es un factor) R1

así pues, la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualquiera es par AG

[3 puntos]

Total [5 puntos]

3. por intentar integrar (M1)

$$u = 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x$$

$$\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}} du \quad (A1)$$

O BIEN

$$= 4\sqrt{u} (+C) \quad A1$$

O BIEN

$$= 4\sqrt{2x^2 + 1} (+C) \quad A1$$

POR LO TANTO

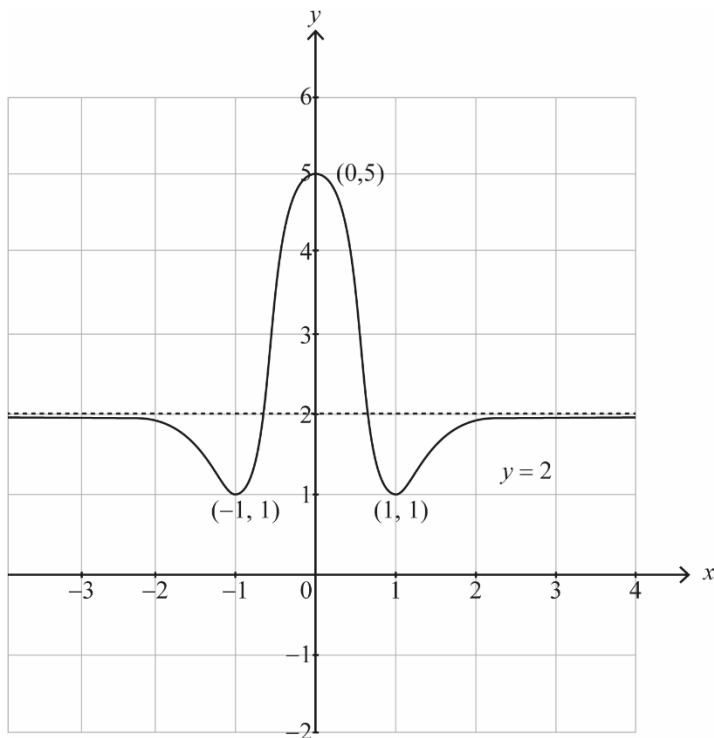
por sustituir correctamente en **su** función integrada (tiene que haber incluido la C) (M1)

$$5 = 4 + C \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = 4\sqrt{2x^2 + 1} + 1 \quad A1$$

Total [5 puntos]

4.



no hay ningún valor de y por debajo de 1
 asíntota horizontal en $y = 2$; la curva se acerca a ella desde abajo,
 cuando $x \rightarrow \pm\infty$
 $(\pm 1, 1)$ mínimos locales
 $(0, 5)$ máximo local
 curva suave y puntos estacionarios suaves

A1

A1

A1

A1

A1

Total [5 puntos]

5. (a) por tratar de hacer la composición de funciones
 por sustituir correctamente $g\left(\frac{x+3}{4}\right) = 8\left(\frac{x+3}{4}\right) + 5$
 $(g \circ f)(x) = 2x + 11$

M1

A1

AG

[2 puntos]

- (b) por tratar de sustituir el 4 (visto aquí o en otro lugar de la pregunta)
 la ecuación correcta: $a = 2 \times 4 + 11$
 $a = 19$

(M1)

(A1)

A1

[3 puntos]

Total [5 puntos]

6. (a) por tratar de utilizar la regla de cambio de base

$$\log_9(\cos 2x + 2) = \frac{\log_3(\cos 2x + 2)}{\log_3 9}$$

$$= \frac{1}{2} \log_3(\cos 2x + 2)$$

$$= \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$$

M1

A1

A1

AG

[3 puntos]

- (b) $\log_3(2 \sin x) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$

$$2 \sin x = \sqrt{\cos 2x + 2}$$

$$4 \sin^2 x = \cos 2x + 2 \text{ (o equivalente)}$$

por utilizar $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$$6 \sin^2 x = 3$$

$$\sin x = (\pm) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

M1

A1

(M1)

A1

A1

Nota: Conceda **A0** si ha incluido alguna otra solución, además de $x = \frac{\pi}{4}$.

[5 puntos]

Total [8 puntos]

7. por tratar de aplicar la integración por partes; *p. ej.*,

$$u = \frac{\pi x}{36}, du = \frac{\pi}{36} dx, dv = \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx, v = -\frac{6}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \quad (M1)$$

$$P(0 \leq X \leq 3) = \frac{\pi}{36} \left(\left[-\frac{6x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^3 + \frac{6}{\pi} \int_0^3 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx \right) \text{ (o equivalente)} \quad A1A1$$

Nota: Conceda **A1** por un uv correcto y **A1** por un $\int v du$ correcto.

por tratar de sustituir los valores en los límites (de integración) **M1**

$$\frac{\pi}{36} \left[-\frac{6x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^3 = 0 \quad (A1)$$

Así pues, $P(0 \leq X \leq 3) = \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^3$ (o equivalente) **A1**

$$= \frac{1}{\pi} \quad A1$$

Total [7 puntos]

8. Por darse cuenta de que el ángulo que forman la normal y la recta es igual a 60° (incluido aquí o en otro lugar de la pregunta)

por tratar de utilizar la fórmula del producto escalar **R1**

$$\cos 60^\circ = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ p \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9} \times \sqrt{1+4+p^2}} \quad A1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|2p|}{3\sqrt{5+p^2}} \quad A1$$

$$3\sqrt{5+p^2} = 4|p|$$

por tratar de elevar al cuadrado ambos miembros **M1**

$$9(5+p^2) = 16p^2 \Rightarrow 7p^2 = 45$$

$$p = \pm 3\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ (o equivalente)} \quad A1A1$$

Total [7 puntos]

9. (a) por tratar de derivar e igualar a cero el resultado

M1

$$f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3) = 0$$

A1

el mínimo está en $x = \ln 3$

$$a = \ln 3$$

A1

[3 puntos]

- (b) **Nota:** El intercambio de x por y se puede hacer en cualquier fase del desarrollo.

$$y = (e^x - 3)^2 - 4$$

(M1)

$$e^x - 3 = \pm\sqrt{y+4}$$

A1

$$\text{dado que } x \leq \ln 3, \quad x = \ln(3 - \sqrt{y+4})$$

R1

$$\text{así pues, } f^{-1}(x) = \ln(3 - \sqrt{x+4})$$

A1

el dominio de f^{-1} es $x \in \mathbb{R}, -4 \leq x < 5$

A1

[5 puntos]

Total [8 puntos]

Sección B

10. (a) por tratar de utilizar la regla del cociente
por sustituir correctamente en la regla del cociente

(M1)

$$f'(x) = \frac{5kx\left(\frac{1}{5x}\right) - k \ln 5x}{(kx)^2} \quad (\text{o equivalente})$$

A1

$$= \frac{k - k \ln 5x}{k^2 x^2}, (k \in \mathbb{R}^+)$$

A1

$$= \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$$

AG

[3 puntos]

- (b) $f'(x) = 0$

M1

$$\frac{1 - \ln 5x}{kx^2} = 0$$

$$\ln 5x = 1$$

(A1)

$$x = \frac{e}{5}$$

A1

[3 puntos]

- (c) $f''(x) = 0$

M1

$$\frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3} = 0$$

$$\ln 5x = \frac{3}{2}$$

A1

$$5x = e^{\frac{3}{2}}$$

A1

así pues, el punto de inflexión está en $x = \frac{1}{5} e^{\frac{3}{2}}$

AG

[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 10 continuación

(d) por tratar de integrar **(M1)**

$$u = \ln 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln 5x}{kx} dx = \frac{1}{k} \int u \, du \quad \textbf{(A1)}$$

O BIEN

$$= \frac{u^2}{2k} \quad \textbf{A1}$$

$$\text{así pues, } \frac{1}{k} \int_1^{\frac{3}{2}} u \, du = \left[\frac{u^2}{2k} \right]_1^{\frac{3}{2}} \quad \textbf{A1}$$

O BIEN

$$= \frac{(\ln 5x)^2}{2k} \quad \textbf{A1}$$

$$\text{así pues, } \int_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \frac{\ln 5x}{kx} dx = \left[\frac{(\ln 5x)^2}{2k} \right]_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \quad \textbf{A1}$$

POR LO TANTO

$$= \frac{1}{2k} \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{5}{8k} \quad \textbf{A1}$$

por igualar **su** expresión del área a 3 **M1**

$$\frac{5}{8k} = 3$$

$$k = \frac{5}{24} \quad \textbf{A1}$$

[7 puntos]

Total [16 puntos]

11. (a) por tratar de hallar el módulo **(M1)**

$$r = 2\sqrt{3} (= \sqrt{12}) \quad \text{A1}$$

por tratar de hallar el argumento en el cuadrante correcto **(M1)**

$$\theta = \pi + \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{A1}$$

$$= \frac{5\pi}{6} \quad \text{A1}$$

$$-3 + \sqrt{3}i = \sqrt{12}e^{\frac{5\pi i}{6}} \left(= 2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi i}{6}} \right)$$

[5 puntos]

- (b) por tratar de hallar una raíz utilizando el teorema de De Moivre **M1**

$$12^{\frac{1}{6}} e^{\frac{5\pi i}{18}} \quad \text{A1}$$

por tratar de hallar dos raíces adicionales sumando y restando $\frac{2\pi}{3}$ al

argumento **M1**

$$12^{\frac{1}{6}} e^{\frac{7\pi i}{18}} \quad \text{A1}$$

$$12^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17\pi i}{18}} \quad \text{A1}$$

Nota: En esta fase, ignore los rótulos correspondientes a u , v y w .

[5 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 11 continuación

(c) **MÉTODO 1**

por tratar de hallar el área total de los triángulos (congruentes) UOV, VOW y UOW

M1

$$\text{Área} = 3 \left(\frac{1}{2} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \sin \frac{2\pi}{3}$$

A1A1

Nota: Conceda **A1** por $\left(12^{\frac{1}{6}} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right)$ y **A1** por $\sin \frac{2\pi}{3}$.

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(12^{\frac{1}{3}} \right) \text{ (o equivalente)}$$

A1

[4 puntos]

MÉTODO 2

$$UV^2 = \left(12^{\frac{1}{6}} \right)^2 + \left(12^{\frac{1}{6}} \right)^2 - 2 \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \cos \frac{2\pi}{3} \text{ (o equivalente)}$$

A1

$$UV = \sqrt{3} \left(12^{\frac{1}{6}} \right) \text{ (o equivalente)}$$

A1

por tratar de hallar el área de UVW utilizando $\text{Area} = \frac{1}{2} \times UV \times VW \times \sin \alpha$

por ejemplo,

M1

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \times 12^{\frac{1}{6}} \right) \left(\sqrt{3} \times 12^{\frac{1}{6}} \right) \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(12^{\frac{1}{3}} \right) \text{ (o equivalente)}$$

A1

[4 puntos]

(d) $u + v + w = 0$

R1

$$12^{\frac{1}{6}} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{18} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{18} \right) + \cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right) = 0$$

A1

por considerar las partes reales

M1

$$12^{\frac{1}{6}} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{18} \right) + \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} \right) = 0$$

$$\cos \left(-\frac{7\pi}{18} \right) = \cos \frac{7\pi}{18} \text{ indicado explícitamente}$$

A1

$$\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{7\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18} = 0$$

AG

[4 puntos]

Total [18 puntos]

12. (a) por tratar de utilizar la regla de la cadena para hallar la derivada primera **M1**
 $f'(x) = (\cos x) e^{\sin x}$ **A1**
 por tratar de utilizar la regla del producto para hallar la derivada segunda **M1**
 $f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$ (o equivalente) **A1**
 por tratar de hallar $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ **M1**
 $f(0) = 1$; $f'(0) = (\cos 0) e^{\sin 0} = 1$; $f''(0) = e^{\sin 0} (\cos^2 0 - \sin 0) = 1$ **A1**
 por sustituir en la fórmula de Maclaurin $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$ **M1**
 así pues, la serie de Maclaurin para $f(x)$ hasta (e incluido) el término en x^2
 es $1 + x + \frac{x^2}{2}$ **A1**

[8 puntos]

(b) **MÉTODO 1**

- por intentar derivar $f''(x)$ **M1**
 $f'''(x) = (\cos x) e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) - (\cos x) e^{\sin x} (2 \sin x + 1)$ (o equivalente) **A2**
 por sustituir $x = 0$ en su expresión de $f'''(x)$ **M1**
 $f'''(0) = 1(1 - 0) - 1(0 + 1) = 0$
 así pues, el coeficiente que acompaña a x^3 en la serie de Maclaurin de $f(x)$ es cero **AG**

MÉTODO 2

- por sustituir $\sin x$ en la serie de Maclaurin de e^x **(M1)**
 $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots$
 por sustituir la serie de Maclaurin de $\sin x$ **M1**

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^3}{3!} + \dots$$
 A1
 el coeficiente que acompaña a x^3 es $-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = 0$ **A1**
 así pues, el coeficiente que acompaña a x^3 en la serie de Maclaurin de $f(x)$ es cero **AG**

[4 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 12 continuación

- (c) por sustituir $3x$ en la serie de Maclaurin de e^x

M1

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots$$

A1

por sustituir $(e^{3x} - 1)$ en la serie de Maclaurin de $\arctan x$

M1

$$\arctan(e^{3x} - 1) = (e^{3x} - 1) - \frac{(e^{3x} - 1)^3}{3} + \frac{(e^{3x} - 1)^5}{5} - \dots$$

$$= \left(3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots \right) - \frac{\left(3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots \right)^3}{3} + \dots$$

A1

por elegir los términos correctos del desarrollo anterior

M1

$$= \left(3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} \right) - \frac{(3x)^3}{3}$$

$$= 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{9x^3}{2}$$

A1

[6 puntos]

- (d) **MÉTODO 1**

por sustituir su serie

M1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \dots}{3x + \frac{9x^2}{2} + \dots}$$

A1

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} + \dots}{3 + \frac{9x}{2} + \dots}$$

$$= \frac{1}{3}$$

A1

MÉTODO 2

por utilizar la regla de l'Hôpital

M1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)e^{\sin x}}{3e^{3x}} \quad (\text{o equivalente})$$

A1

$$\frac{1 + (e^{3x} - 1)^2}{1 + (e^{3x} - 1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

A1

[3 puntos]

Total [21 puntos]

**Matemáticas: Análisis y Enfoques**
Nivel Superior
Prueba 2

Examen de muestra

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas de **Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



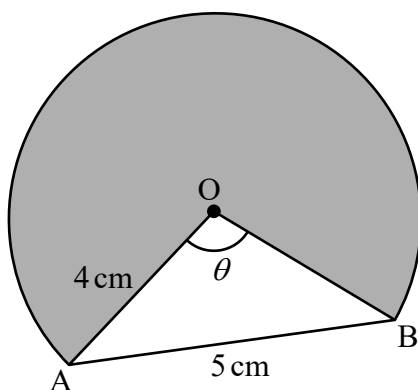
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra una parte de un círculo de centro O y radio igual a 4 cm .



La cuerda AB mide 5 cm de longitud y $\angle AOB = \theta$.

(a) Halle el valor de θ y dé la respuesta en radianes.

[3]

(b) Halle el área de la región sombreada.

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 6]

El 1 de enero de 2020, Laurie invierte $P\$$ en una cuenta que ofrece un tipo de interés nominal anual del $5,5\%$, compuesto **trimestralmente**.

La cantidad de dinero que Laurie tiene en la cuenta **al final de cada año** sigue una progresión geométrica de razón común, r .

- (a) Halle el valor de r , dé la respuesta redondeando a cuatro cifras significativas. [3]

Laurie no hace ningún otro ingreso en esa cuenta ni tampoco saca dinero de ella.

- (b) Halle el año en el que la cantidad de dinero que tiene Laurie en la cuenta será el doble de la cantidad que invirtió. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 6]

Un dado no equilibrado de seis caras está hecho de tal modo que la probabilidad de sacar un “seis” es $\frac{7}{10}$.

Se tira este dado cinco veces. Halle la probabilidad de sacar:

(a) Como mucho tres “seises”. [3]

(b) El tercer “seis” a la quinta tirada. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 7]

La siguiente tabla muestra las notas que han obtenido siete alumnos en dos exámenes de matemáticas distintos.

Examen 1 (x)	15	23	25	30	34	34	40
Examen 2 (y)	20	26	27	32	35	37	35

Sea L_1 la recta de regresión de x sobre y . La ecuación de la recta L_1 se puede escribir de la forma $x = ay + b$.

- (a) Halle el valor de a y el valor de b . [2]

Sea L_2 la recta de regresión de y sobre x . Las rectas L_1 y L_2 pasan por un mismo punto de coordenada (p, q) .

- (b) Halle el valor de p y el valor de q . [3]

- (c) Jennifer no pudo hacer el primer examen pero sacó 29 puntos en el segundo examen. Utilice una ecuación de regresión adecuada para estimar la nota que habría sacado Jennifer en el primer examen. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 7]

El desplazamiento (s , en centímetros) de una partícula respecto al origen O en el instante t segundos viene dado por $s(t) = t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 5$.

(a) Halle la distancia máxima de la partícula respecto a O . [3]

(b) Halle la aceleración de la partícula en el instante en el que cambia de sentido por primera vez. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 6]

En una ciudad dada, el número de pasajeros (X) que van en un taxi ocupado tiene la siguiente distribución de probabilidad.

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,60	0,30	0,03	0,05	0,02

Tras la apertura de una autopista nueva donde hay que pagar peaje, una empresa de taxis decide cobrar un suplemento en aquellos viajes donde haya que utilizar la autopista. Así, cobran 2,40\$ por taxi más 1,20\$ por pasajero.

Sea T el coste (en dólares) del suplemento que cobra la empresa de taxis en cada viaje.

(a) Halle $E(T)$. [4]

(b) Sabiendo que $\text{Var}(X) = 0,8419$, halle $\text{Var}(T)$. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 5]

Dos barcos, A y B, están siendo observados desde un origen O. Los vectores de posición de los barcos respecto a O en el instante t horas después del mediodía son

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

donde las distancias se miden en kilómetros.

Halle la distancia mínima que habrá entre los dos barcos.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. [Puntuación máxima: 7]

Los números complejos w y z satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\frac{w}{z} = 2i$$
$$z^* - 3w = 5 + 5i.$$

Halle w y z y expréselos de la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Puntuación máxima: 5]

Considere los gráficos de $y = \frac{x^2}{x-3}$ e $y = m(x+3)$, $m \in \mathbb{R}$.

Halle el conjunto de valores de m para los cuales los dos gráficos no se cortan en ningún punto.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 15]

La longitud (X mm) de una determinada especie de concha marina sigue una distribución normal, de media 25 y varianza σ^2 .

La probabilidad de que X sea menor que 24,15 es igual a 0,1446.

(a) Halle $P(24,15 < X < 25)$. [2]

(b) (i) Halle σ ; es decir, la desviación típica de X .

(ii) A partir de lo anterior, halle la probabilidad de que una concha marina elegida al azar mida más de 26 mm de largo. [5]

En una playa dada, se recoge una muestra aleatoria compuesta por 10 conchas marinas. Sea Y el número de conchas marinas que miden más de 26 mm de largo.

(c) Halle $E(Y)$. [3]

(d) Halle la probabilidad de que exactamente tres de estas conchas marinas midan más de 26 mm de largo. [2]

Una concha marina elegida al azar mide menos de 26 mm de largo.

(e) Halle la probabilidad de que mida entre 24,15 mm y 25 mm de largo. [3]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 21]

Un tanque de grandes dimensiones contiene inicialmente agua pura. A continuación empieza a entrar en el tanque un flujo de agua salada. La solución se mantiene homogénea porque se la está removiendo constantemente. Dicha solución, a su vez, va saliendo del tanque a través de un orificio que hay en la base.

Sean x gramos la cantidad de sal que hay en el tanque en un momento dado y sean t minutos el tiempo transcurrido desde que el agua salada empezó a entrar en el tanque.

La razón de cambio de la cantidad de sal que hay en el tanque, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ viene dada por la

ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = 10e^{-\frac{t}{4}} - \frac{x}{t+1}$.

(a) Muestre que $t+1$ es un factor integrante para esta ecuación diferencial. [2]

(b) A partir de lo anterior, y resolviendo esta ecuación diferencial, muestre que

$$x(t) = \frac{200 - 40e^{-\frac{t}{4}}(t+5)}{t+1}. \quad [8]$$

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de x en función de t para $0 \leq t \leq 60$ y, a partir de lo anterior, halle la máxima cantidad de sal que habrá en el tanque y el instante t en el que esto sucederá. [5]

(d) Halle el instante t en el que la cantidad de sal que hay en el tanque estará disminuyendo más rápidamente. [2]

La razón de cambio de la cantidad de sal que sale del tanque es igual a $\frac{x}{t+1}$.

(e) Halle la cantidad de sal que habrá salido del tanque en los primeros 60 minutos. [4]

12. [Puntuación máxima: 19]

(a) Muestre que $\cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$. [1]

(b) Verifique que $x = \tan \theta$ y $x = -\cot \theta$ satisfacen la ecuación $x^2 + (2 \cot 2\theta)x - 1 = 0$. [7]

(c) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, muestre que el valor exacto de $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$. [5]

(d) Utilizando el resultado de los apartados (b) y (c), halle el valor exacto de $\tan \frac{\pi}{24} - \cot \frac{\pi}{24}$. Dé la respuesta de la forma $a + b\sqrt{3}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$. [6]



Esquema de calificación

Examen de muestra

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 2

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*) ; a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

*Puntúe cada pregunta y cada apartado utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1**, **A2**.*

2 Puntos de método y puntos de respuesta/precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio (el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) y hay que puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si es que se ha concedido alguno).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: «se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**».
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea, se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2**, **N3**, etc., **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontremos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el procedimiento **correcto** (razonamiento seguido y cálculos realizados) o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento se haya **incluido por escrito explícitamente**.

4 Puntuaciones de arrastre de error (solo se aplican / se conceden después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés follow-through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados **posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **el alumno tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (es decir, los cálculos/razonamientos que ha seguido); no basta con que haya dado una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta que dio en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido en el apartado anterior la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de $r > 1$ para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizá estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la respuesta correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos dados en el enunciado de la pregunta, esto se considera un «error de lectura» (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar datos suyos (es decir, extraídos de su propio desarrollo), eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando el alumno ha incluido el desarrollo del ejercicio (cálculos y/o razonamientos). En aquellas preguntas de calculadora donde el alumno no ha incluido el desarrollo de la pregunta y ha dado además una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que lo que ha sucedido es que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

6 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar conforme a lo que indica el esquema de calificación.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos
MÉTODO 1,
MÉTODO 2, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN.**

7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

8 Precisión de las respuestas

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, en el esquema de calificación se incluirá un punto por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.*»

9 Calculadoras

Para la prueba 2 sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las dotadas de un sistema algebraico computacional.

Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; en ningún caso está permitido usar notación de calculadora.

No acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

Sección A

1. (a) **MÉTODO 1**

por tratar de utilizar el teorema del coseno

(M1)

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 4} \text{ (o equivalente)}$$

A1

$$\theta = 1,35$$

A1

[3 puntos]

MÉTODO 2

por tratar de dividir el triángulo AOB en dos triángulos rectángulos congruentes

(M1)

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2,5}{4}$$

A1

$$\theta = 1,35$$

A1

[3 puntos]

(b) por tratar de hallar el área de la región sombreada

(M1)

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times (2\pi - 1,35\dots)$$

A1

$$= 39,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

A1

[3 puntos]

Total [6 puntos]

2. (a) $\left(1 + \frac{5,5}{4 \times 100}\right)^4$

1,056

(M1)(A1)

A1

[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 2: continuación

(b) **O BIEN**

$$2P = P \times \left(1 + \frac{5,5}{100 \times 4}\right)^{4n} \quad \text{O BIEN} \quad 2P = P \times (\text{su } (a))^m \quad (M1)(A1)$$

Nota Conceda **(M1)** por sustituir los valores en la fórmula del valor de la inversión.
Conceda **(A1)** por haberlos sustituido correctamente.

O BIEN

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 5,5$$

$$P/A = 4$$

$$C/Y = 4$$

$$n = 50,756\dots$$

(M1)(A1)

O BIEN

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 100(\text{su } (a) - 1)$$

$$P/A = 1$$

$$C/Y = 1$$

(M1)(A1)

POR LO TANTO

$$\Rightarrow 12,7 \text{ years}$$

Laurie conseguirá tener el doble de la cantidad invertida durante el año 2032 **A1**

[3 puntos]

Total [6 puntos]

3. (a) por reconocer la distribución binomial

(M1)

$$X \sim B(5; 0,7)$$

por tratar de hallar $P(X \leq 3)$

M1

$$= 0,472 (= 0,47178)$$

A1

[3 puntos]

(b) por darse cuenta de que hacen falta 2 seises en 4 tiradas

(M1)

$$P(\text{3er seis en la 5.ª tirada}) = \left[\binom{4}{2} \times (0,7)^2 \times (0,3)^2 \right] \times 0,7 (= 0,2646 \times 0,7)$$

A1

$$= 0,185 (= 0,18522)$$

A1

[3 puntos]

Total [6 puntos]

4. (a) $a = 1,29$ y $b = -10,4$ **A1A1**
[2 puntos]
- (b) por darse cuenta de que las dos rectas pasan por el punto correspondiente a la media **(M1)**
A2
[3 puntos]
 $p = 28,7$, $q = 30,3$
- (c) por sustituir valores en **su** ecuación de x sobre y **(M1)**
A1
 $x = 1,29082(29) - 10,3793$
 $x = 27,1$
- Nota:** Acepte 27.
- [2 puntos]**
Total [7 puntos]

5. (a) por utilizar un gráfico para hallar las coordenadas del mínimo local **(M1)**
(A1)
A1
[3 puntos]
 $s = -16,513...$
 la distancia máxima es 16,5 cm (a la izquierda de O)
- (b) por tratar de hallar el instante en el que la partícula cambia de sentido **(M1)**
(A1)
p. ej., considerando el primer máximo que hay en el gráfico de s o el primer punto de corte con el eje t – en el gráfico de s'
 $t = 1,51986...$
- por tratar de hallar la pendiente de s' para **su** valor de t , $s''(1,51986...)$ **(M1)**
A1
[4 puntos]
 $= -8,92 \text{ (cm/s}^2\text{)}$
- Total [7 puntos]**

6. (a) **MÉTODO 1**

por tratar de utilizar la fórmula del valor esperado (M1)

$$E(X) = (1 \times 0,60) + (2 \times 0,30) + (3 \times 0,03) + (4 \times 0,05) + (5 \times 0,02)$$

$$E(X) = 1,59(\$) \quad (A1)$$

por utilizar $E(1,20X + 2,40) = 1,20E(X) + 2,40$ (M1)

$$E(T) = 1,20(1,59) + 2,40$$

$$= 4,31(\$) \quad A1$$

MÉTODO 2

por tratar de hallar la distribución de probabilidad correspondiente a T (M1)

t	3,60	4,80	6,00	7,20	8,40
$P(T=t)$	0,60	0,30	0,03	0,05	0,02

(A1)

por tratar de utilizar la fórmula del valor esperado (M1)

$$E(T) = (3,60 \times 0,60) + (4,80 \times 0,30) + (6,00 \times 0,03) + (7,20 \times 0,05) + (8,40 \times 0,02)$$

$$= 4,31(\$) \quad A1$$

[4 puntos]

(b) **MÉTODO 1**

por utilizar $\text{Var}(1,20X + 2,40) = (1,20)^2 \text{Var}(X)$ con $\text{Var}(X) = 0,8419$ (M1)

$$\text{Var}(T) = 1,21 \quad A1$$

MÉTODO 2

por hallar la desviación típica correspondiente a su distribución de probabilidad que hallaron en el apartado (a) (M1)

$$\text{Var}(T) = (1,101\dots)^2$$

$$= 1,21 \quad A1$$

Nota: Conceda **M1A1** por $\text{Var}(T) = (1,093\dots)^2 = 1,20$.

[2 puntos]

Total [6 puntos]

7. por tratar de hallar $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, por ejemplo **(M1)**
- $$\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
- por tratar de hallar $|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|$ **M1**
- distancia $d(t) = \sqrt{(3-5t)^2 + (4t-6)^2} (= \sqrt{41t^2 - 78t + 45})$ **A1**
- por utilizar un gráfico para hallar la coordenada d – del mínimo local **M1**
- la distancia mínima a la que estarán los barcos es $2,81 \text{ (km)} \left(= \frac{11\sqrt{41}}{41} \text{ (km)} \right)$ **A1**
- Total [5 puntos]**
-
8. por sustituir $w = 2iz$ en $z^* - 3w = 5 + 5i$ **M1**
- $$z^* - 6iz = 5 + 5i$$
- sea $z = x + yi$ **A1**
- por comparar la parte real y la parte imaginaria de $(x - yi) - 6i(x + yi) = 5 + 5i$ **M1**
- para obtener $x + 6y = 5$ y $-6x - y = 5$ **A1**
- por tratar de resolver para x and y **M1**
- $$x = -1 \text{ r } y = 1 \text{ y, así, } z = -1 + i$$
- por consiguiente, $w = -2 - 2i$ **A1**
- Total [7 puntos]**

9. MÉTODO 1

por hacer un dibujo aproximado del gráfico de $y = \frac{x^2}{x-3}$ ($y = x + 3 + \frac{9}{x-3}$) **M1**

La asíntota (oblicua) tiene pendiente igual a 1
y, por lo tanto, el valor máximo de m es 1 **R1**

por considerar una recta que tenga más inclinación (más pendiente) que la
recta horizontal que une $(-3, 0)$ y $(0, 0)$ **M1**

así pues, $m > 0$ **R1**

por consiguiente, $0 < m \leq 1$ **A1**

MÉTODO 2

por tratar de eliminar y para tener una ecuación cuadrática en x **M1**

$$x^2 = m(x^2 - 9)$$

$$\Rightarrow (m-1)x^2 - 9m = 0$$
 A1

O BIEN

por tratar de resolver $-4(m-1)(-9m) < 0$ para m **M1**

O BIEN

por tratar de resolver $x^2 < 0$; es decir, $\frac{9m}{m-1} < 0$ ($m \neq 1$) para m **M1**

POR LO TANTO

$$\Rightarrow 0 < m < 1$$
 A1

por dar una razón válida para explicar por qué para $m = 1$ no hay solución
posible; p. ej., si $m = 1$,

$$(m-1)x^2 - 9m = 0 \Rightarrow -9 = 0 \text{ y, por consiguiente, } 0 < m \leq 1$$
 R1

Total [5 puntos]

Sección B

10. (a) por tratar de utilizar la simetría de la curva de la distribución normal (M1)
p. ej., una figura, $0,5 - 0,1446$
 $P(24,15 < X < 25) = 0,3554$ A1
 [2 puntos]
- (b) (i) por utilizar la función inversa de la distribución normal para hallar la puntuación z (M1)
 $z = -1,0598$
 por sustituir correctamente $\frac{24,15 - 25}{\sigma} = -1,0598$ (A1)
 $\sigma = 0,802$ A1
- (ii) $P(X > 26) = 0,106$ (M1)A1
 [5 puntos]
- (c) por darse cuenta de que era probabilidad binomial (M1)
 $E(Y) = 10 \times 0,10621$ (A1)
 $= 1,06$ A1
 [3 puntos]
- (d) $P(Y = 3)$ (M1)
 $= 0,0655$ A1
 [2 puntos]
- (e) por darse cuenta de que era probabilidad condicionada (M1)
 por sustituir correctamente A1
 $\frac{0,3554}{1 - 0,10621}$
 $= 0,398$ A1
 [3 puntos]
- Total [15 puntos]**

11. (a) **MÉTODO 1**

por utilizar $I(t) = e^{\int P(t) dt}$

M1

$$e^{\int \frac{1}{t+1} dt}$$

$$= e^{\ln(t+1)}$$

$$= t + 1$$

A1

AG

MÉTODO 2

por tratar de utilizar la regla del producto para derivar $\frac{d}{dt}(x(t+1))$

M1

$$\frac{d}{dt}(x(t+1)) = \frac{dx}{dt}(t+1) + x$$

$$= (t+1) \left(\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t+1} \right)$$

A1

así pues, $t+1$ es un factor integrante para esta ecuación diferencial

AG

[2 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 11: continuación

- (b) por tratar de multiplicar por $(t+1)$ y ordenar ambos miembros de la ecuación hasta obtener

(M1)

$$(t+1)\frac{dx}{dt} + x = 10(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$$

A1

$$\frac{d}{dt}(x(t+1)) = 10(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$$

$$x(t+1) = \int 10(t+1)e^{-\frac{t}{4}} dt$$

A1

por tratar de integrar por partes el miembro de la derecha

M1

$$= -40(t+1)e^{-\frac{t}{4}} + 40 \int e^{-\frac{t}{4}} dt$$

$$= -40(t+1)e^{-\frac{t}{4}} - 160e^{-\frac{t}{4}} + C$$

A1

Nota: Perdona la ausencia de C .

O BIEN

por sustituir $t = 0, x = 0 \Rightarrow C = 200$

M1

$$x = \frac{-40(t+1)e^{-\frac{t}{4}} - 160e^{-\frac{t}{4}} + 200}{t+1}$$

A1

por usar $-40e^{-\frac{t}{4}}$ como máximo común divisor de $-40(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$ y $-160e^{-\frac{t}{4}}$

M1

O BIEN

por usar $-40e^{-\frac{t}{4}}$ como máximo común divisor de $-40(t+1)e^{-\frac{t}{4}}$ y $-160e^{-\frac{t}{4}}$

y llegar a $x(t+1) = -40e^{-\frac{t}{4}}(t+5) + C$ (o equivalente)

M1A1

por sustituir $t = 0, x = 0 \Rightarrow C = 200$

M1

POR LO TANTO

$$x(t) = \frac{200 - 40e^{-\frac{t}{4}}(t+5)}{t+1}$$

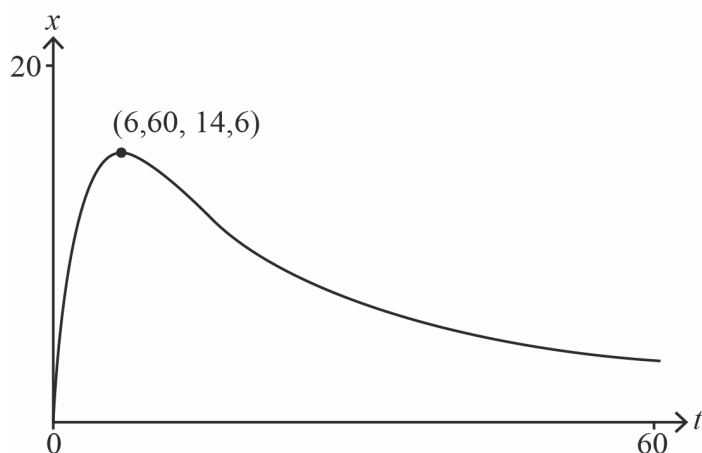
AG

[8 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 11: continuación

(c)



si el gráfico empieza en el origen y tiene un máximo local (no es necesario dar sus coordenadas)

A1

si el bosquejo abarca el intervalo $0 \leq t \leq 60$

A1

si tiene la concavidad correcta en todo el intervalo $0 \leq t \leq 60$

A1

la cantidad máxima de sal es 14,6 (gramos) at $t = 6,60$ (minutos)

A1A1

[5 puntos]

(d) por utilizar un gráfico adecuado o una ecuación apropiada (derivada primera o segunda)

M1

la cantidad de sal estará disminuyendo más rápidamente en $t = 12,9$ (minutos)

A1

[2 puntos]

(e) **O BIEN**

por tratar de plantear una integral que represente la cantidad de sal que ha salido del tanque

M1

$$\int_0^{60} \frac{x(t)}{t+1} dt$$

$$\int_0^{60} \frac{200 - 40e^{-\frac{t}{4}}(t+5)}{(t+1)^2} dt$$

A1

O BIEN

por tratar de plantear una integral que represente la cantidad de sal que ha entrado en el tanque menos la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante $t = 60$ (minutos)

M1

la cantidad de sal que habrá salido del tanque es $\int_0^{60} 10e^{-\frac{t}{4}} dt - x(60)$

A1

POR LO TANTO

= 36,7 (gramos)

A2

[4 puntos]

Total [21 puntos]

12. (a) por indicar la relación que existe entre $\cot$ y $\tan$ y indicar la fórmula del ángulo doble para $\tan 2\theta$

M1

$$\cot 2\theta = \frac{1}{\tan 2\theta} \text{ y } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$$

AG

[1 punto]

- (b) **MÉTODO 1**

por tratar de sustituir $\tan \theta$ para x y utilizar el resultado obtenido en (a)

M1

$$\text{Miembro de la izda.} = \tan^2 \theta + 2 \tan \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \right) - 1$$

A1

$$\tan^2 \theta + 1 - \tan^2 \theta - 1 = 0 \text{ (= miembro de la dcha.)}$$

A1

así pues, $x = \tan \theta$ satisface la ecuación

AG

por tratar de sustituir $-\cot \theta$ para x y utilizar el resultado obtenido en (a)

M1

$$\text{Miembro de la izda.} = \cot^2 \theta - 2 \cot \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \right) - 1$$

A1

$$= \frac{1}{\tan^2 \theta} - \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right) - 1$$

A1

$$\frac{1}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1 - 1 = 0 \text{ (= Miembro de la dcha.)}$$

A1

así pues, $x = -\cot \theta$ satisface la ecuación

AG

MÉTODO 2

sea $\alpha = \tan \theta$ y $\beta = -\cot \theta$

por tratar de hallar la suma de las raíces

M1

$$\alpha + \beta = \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan \theta}$$

A1

$$= -2 \cot 2\theta \text{ (Procedente del apartado (a))}$$

A1

por tratar de hallar el producto de las raíces

M1

$$\alpha\beta = \tan \theta \times (-\cot \theta)$$

A1

$$= -1$$

A1

el coeficiente de x y el término constante en la expresión cuadrática son

$2 \cot 2\theta$ y -1 , respectivamente

R1

por consiguiente, las dos raíces son $\alpha = \tan \theta$ y $\beta = -\cot \theta$

AG

[7 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 12: continuación

(c) **MÉTODO 1**

$$x = \tan \frac{\pi}{12} \text{ y } x = -\cot \frac{\pi}{12} \text{ son raíces de } x^2 + \left(2 \cot \frac{\pi}{6}\right)x - 1 = 0 \quad \mathbf{R1}$$

Nota: Conceda **R1** si solo ha dado $x = \tan \frac{\pi}{12}$ como raíz de $x^2 + \left(2 \cot \frac{\pi}{6}\right)x - 1 = 0$.

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad \mathbf{A1}$$

por tratar de resolver **su** ecuación cuadrática **M1**

$$x = -\sqrt{3} \pm 2 \quad \mathbf{A1}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} > 0 \quad (-\cot \frac{\pi}{12} < 0) \quad \mathbf{R1}$$

$$\text{así pues, } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \quad \mathbf{AG}$$

MÉTODO 2

por tratar de sustituir $\theta = \frac{\pi}{12}$ en la fórmula (del ángulo doble) para $\tan 2\theta$ **M1**

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{12} + 2\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{12} - 1 = 0 \quad \mathbf{A1}$$

por tratar de resolver **su** ecuación cuadrática **M1**

$$\tan \frac{\pi}{12} = -\sqrt{3} \pm 2 \quad \mathbf{A1}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} > 0 \quad \mathbf{R1}$$

$$\text{así pues, } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \quad \mathbf{AG}$$

[5 puntos]

(d) $\tan \frac{\pi}{24} - \cot \frac{\pi}{24}$ es la suma de las raíces de $x^2 + \left(2 \cot \frac{\pi}{12}\right)x - 1 = 0$ **R1**

$$\tan \frac{\pi}{24} - \cot \frac{\pi}{24} = -2 \cot \frac{\pi}{12} \quad \mathbf{A1}$$

$$= \frac{-2}{2 - \sqrt{3}} \quad \mathbf{A1}$$

por tratar de racionalizar **su** denominador **(M1)**

$$= -4 - 2\sqrt{3} \quad \mathbf{A1A1}$$

[6 puntos]

Total [19 puntos]

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

Examen de muestra

1 hora

Instrucciones para los alumnos

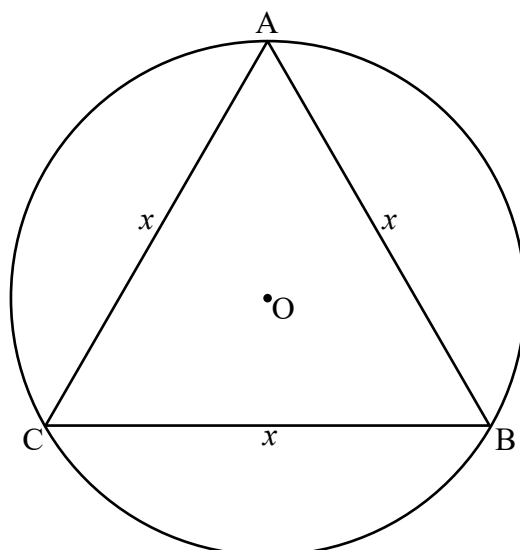
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas de **Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

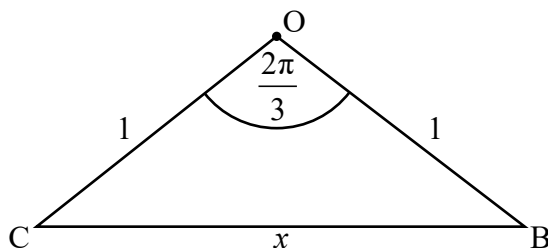
1. [Puntuación máxima: 30]

En esta pregunta le pedimos que investigue los polígonos regulares de n lados que están inscritos en un círculo o que circunscriben a un círculo, y que analice el perímetro de estas figuras cuando n tiende a infinito, con el fin de conocer el valor aproximado de π .

- (a) Considere un triángulo equilátero ABC de x unidades de lado que está inscrito en un círculo de radio 1 unidad y centro O, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Este triángulo equilátero ABC se puede dividir en tres triángulos isósceles de menor tamaño; cada uno de ellos subtiende en O un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$, como aparece reflejado en la siguiente figura.



Utilizando las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo o de cualquier otro modo alternativo, muestre que el perímetro del triángulo equilátero ABC es igual a $3\sqrt{3}$ unidades.

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

- (b) Considere ahora un cuadrado de x unidades de lado que está inscrito en un círculo de radio 1 unidad. Dividiendo este cuadrado inscrito en cuatro triángulos isósceles, halle el perímetro exacto de dicho cuadrado inscrito. [3]

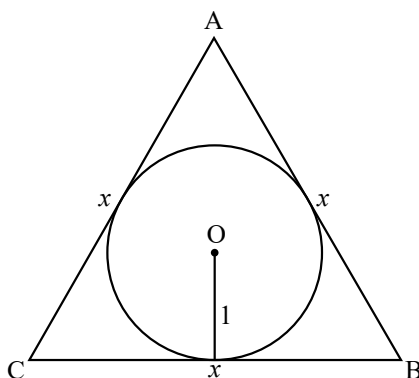
- (c) Halle ahora el perímetro de un hexágono regular de x unidades de lado que está inscrito en un círculo de radio 1 unidad. [2]

Sea $P_i(n)$ el perímetro de un polígono regular de n lados que está inscrito en un círculo de radio 1 unidad.

- (d) Muestre que $P_i(n) = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. [3]

- (e) Utilice un desarrollo en serie de Maclaurin que resulte apropiado para hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} P_i(n)$. Interprete este resultado geoméricamente. [5]

Considere ahora un triángulo equilátero ABC de x unidades de lado que circunscribe a un círculo de radio 1 unidad y centro O, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Sea $P_c(n)$ el perímetro de un polígono regular de n lados que circunscribe a un círculo de radio 1 unidad.

- (f) Muestre que $P_c(n) = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. [4]

- (g) Escriba $P_c(n)$ de la forma $\frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ y, de ese modo, halle $\lim_{n \rightarrow \infty} P_c(n)$. [5]

- (h) Utilice los resultados obtenidos en los apartados (d) y (f) para determinar una inecuación que sirva para acotar el valor de π en función de n . [2]

Esta inecuación que ha hallado en el apartado (h) se puede utilizar para determinar un límite inferior y un límite superior para el valor de π .

- (i) Determine el valor más pequeño de n para el cual ese límite inferior y ese límite superior están ambos a una distancia de π menor que 0,005. [3]

2. [Puntuación máxima: 25]

En esta pregunta le pedimos que investigue una serie de propiedades de la sucesión de aquellas funciones que son de la forma $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Importante: En esta pregunta, cuando vaya a dibujar aproximadamente un gráfico, **no** es necesario que halle las coordenadas de ninguno de los puntos de corte con los ejes ni las coordenadas de ningún punto estacionario, a no ser que se pida explícitamente en el enunciado.

- (a) En unos mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$. [2]
- (b) Para los valores impares de $n > 2$, utilice la calculadora de pantalla gráfica para ir variando sistemáticamente el valor de n . A partir de lo anterior, sugiera una expresión para los valores impares de n que describa, en función de n , el número de...
- (i) máximos locales;
- (ii) mínimos locales. [4]
- (c) En unos ejes de coordenadas distintos, dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f_2(x)$, para $y = f_4(x)$ for $-1 \leq x \leq 1$. [2]
- (d) Para los valores pares de $n > 2$, utilice la calculadora de pantalla gráfica para ir variando sistemáticamente el valor de n . A partir de lo anterior, sugiera una expresión para los valores pares de n que describa, en función de n , el número de...
- (i) máximos locales;
- (ii) mínimos locales. [4]
- (e) Resuelva la ecuación $f'_n(x) = 0$ y, a partir de lo anterior, muestre que los puntos estacionarios del gráfico de $y = f_n(x)$ están en $x = \cos \frac{k\pi}{n}$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < k < n$. [4]

La sucesión de funciones, $f_n(x)$, definida anteriormente se puede expresar como una sucesión de polinomios de grado n .

- (f) Utilice una relación trigonométrica apropiada para mostrar que $f_2(x) = 2x^2 - 1$. [2]

Considere $f_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos x)$.

- (g) Utilice una relación trigonométrica apropiada para mostrar que $f_{n+1}(x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$. [2]
- (h) A partir de lo anterior,...
- (i) Muestre que $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$;
- (ii) Expresé $f_3(x)$ como un polinomio cúbico. [5]

Esquema de calificación

Examen de muestra

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*) ; a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

*Puntúe cada pregunta y cada apartado utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1**, **A2**.*

2 Puntos de método y puntos de respuesta/precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio (el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) y hay que puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si es que se ha concedido alguno).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: «se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**».
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea, se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2**, **N3**, etc., **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontremos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el procedimiento **correcto** (razonamiento seguido y cálculos realizados) o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento se haya **incluido por escrito explícitamente**.

4 Puntuaciones de arrastre de error (solo se aplican / se conceden después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés follow-through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados **posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **el alumno tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (es decir, los cálculos/razonamientos que ha seguido); no basta con que haya dado una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta que dio en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido en el apartado anterior la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de $r > 1$ para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizá estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la respuesta correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos dados en el enunciado de la pregunta, esto se considera un «error de lectura» (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar datos suyos (es decir, extraídos de su propio desarrollo), eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando el alumno ha incluido el desarrollo del ejercicio (cálculos y/o razonamientos). En aquellas preguntas de calculadora donde el alumno no ha incluido el desarrollo de la pregunta y ha dado además una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que lo que ha sucedido es que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

6 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar conforme a lo que indica el esquema de calificación.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos
MÉTODO 1,
MÉTODO 2, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN.**

7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

8 Precisión de las respuestas

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, en el esquema de calificación se incluirá un punto por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.*»

9 Calculadoras

Para la prueba 3 sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las dotadas de un sistema algebraico computacional.

Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; en ningún caso está permitido usar notación de calculadora.

No acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

1. (a) **MÉTODO 1**

por considerar el triángulo rectángulo OCX, donde $CX = \frac{x}{2}$

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{x}{2}}{1} \quad \text{M1A1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3} \quad \text{A1}$$

$$P_i = 3 \times x = 3\sqrt{3} \quad \text{AG}$$

MÉTODO 2

p. ej., utilizar el teorema del coseno $x^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos \frac{2\pi}{3}$ M1A1

$$x = \sqrt{3} \quad \text{A1}$$

$$P_i = 3 \times x = 3\sqrt{3} \quad \text{AG}$$

Nota: Acepte el empleo del teorema del seno.

[3 puntos]

(b) $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{x}$ donde x = lado del cuadrado M1

$$x = \sqrt{2} \quad \text{A1}$$

$$P_i = 4\sqrt{2} \quad \text{A1}$$

[3 puntos]

(c) 6 triángulos equiláteros $\Rightarrow x = 1$ A1
 $P_i = 6$ A1

[2 puntos]

(d) en un triángulo rectángulo $\text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{\frac{x}{2}}{1}$ M1

$$\Rightarrow x = 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad \text{A1}$$

$$P_i = n \times x$$

$$P_i = n \times 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad \text{M1}$$

$$P_i = 2n \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad \text{AG}$$

[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 1: continuación

(e) por considerar $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

por hacer uso de $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

M1

$$2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3} + \frac{\pi^5}{120n^5} - \dots \right)$$

(A1)

$$= 2 \left(\pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} - \dots \right)$$

A1

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi$$

A1

cuando $n \rightarrow \infty$ el polígono se convierte en un círculo de radio 1 y $P_i = 2\pi$

R1

[5 puntos]

(f) por considerar un polígono de n lados donde cada lado mide x

$2n$ triángulos rectángulos con un ángulo $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ en el centro

M1A1

lado opuesto $\frac{x}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow x = 2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

M1A1

Perímetro $P_c = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

AG

[4 puntos]

(g) por considerar $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{0}{0}$$

R1

por tratar de utilizar la regla de L'Hôpital

M1

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\frac{2\pi}{n^2} \sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \right)$$

A1A1

$$= 2\pi$$

A1

[5 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 1: continuación

(h) $P_i < 2\pi < P_c$

$$2n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) < 2\pi < 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

M1

$$n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

A1

[2 puntos]

- (i) por tratar de hallar un límite inferior y un límite superior que estén ambos a una distancia de π menor que 0,005

(M1)

$$n = 46$$

A2

[3 puntos]

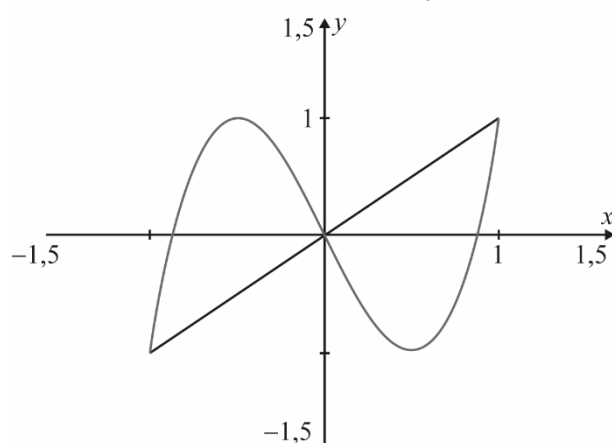
Total [30 puntos]

2. (a) por un gráfico correcto de $y = f_1(x)$

A1

- por un gráfico correcto de $y = f_3(x)$

A1



[2 puntos]

- (b) (i) por una prueba gráfica o en forma de tabla de que ha ido variando n de manera sistemática

M1

p. ej., $n = 3$, 1 máximo local y 1 mínimo local

$n = 5$, 2 máximos locales y 2 mínimos locales

$n = 7$, 3 máximos locales y 3 mínimos locales

(A1)

$$\frac{n-1}{2} \text{ máximos locales}$$

A1

- (ii) $\frac{n-1}{2}$ mínimos locales

A1

Nota: Permita el “arrastre de error” si ha obtenido una fórmula incorrecta para el número de máximos locales.

[4 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

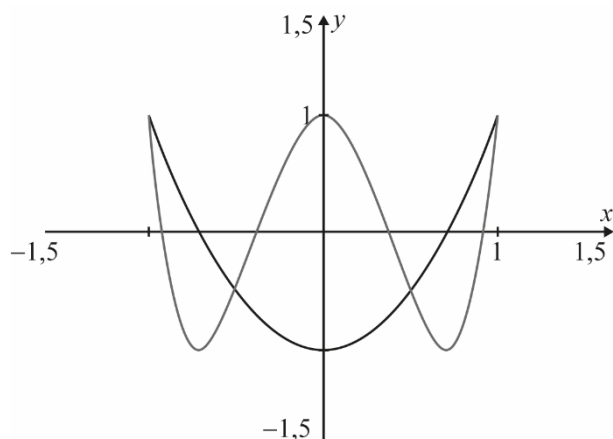
Pregunta 2: continuación

(c) por un gráfico correcto de $y = f_2(x)$

A1

por un gráfico correcto de $y = f_4(x)$

A1



[2 puntos]

(d) (i) por una prueba gráfica o en forma de tabla de que ha ido variando n de manera sistemática

M1

p. ej., $n = 2$, 0 máximos locales y 1 mínimo local

$n = 4$, 1 máximos locales y 2 mínimos locales

$n = 6$, 2 máximos locales y 3 mínimos locales

(A1)

$\frac{n-2}{2}$ máximos locales

A1

(ii) $\frac{n}{2}$ mínimos locales

A1

[4 puntos]

(e) $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

$$f'_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

M1A1

Nota: Conceda **M1** por haber tratado de utilizar la regla de la cadena.

$$f'_n(x) = 0 \Rightarrow n \sin(n \arccos(x)) = 0$$

M1

$$n \arccos(x) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

A1

lo que conduce a

$$x = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } 0 < k < n)$$

AG

[4 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 2: continuación

- (f) $f_2(x) = \cos(2 \arccos x)$
 $= 2(\cos(\arccos x))^2 - 1$ **M1**
 por indicar que $(\cos(\arccos x)) = x$ **A1**
 así pues, $f_2(x) = 2x^2 - 1$ **AG**
[2 puntos]
- (g) $f_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos x)$
 $= \cos(n \arccos x + \arccos x)$ **A1**
 por utilizar $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, lo que conduce a **M1**
 $= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$ **AG**
[2 puntos]
- (h) (i) $f_{n-1}(x) = \cos((n-1) \arccos x)$ **A1**
 $= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x)$ **M1**
 $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x)$ **A1**
 $= 2x f_n(x)$ **AG**
- (ii) $f_3(x) = 2x f_2(x) - f_1(x)$ **(M1)**
 $= 2x(2x^2 - 1) - x$
 $= 4x^3 - 3x$ **A1**
[5 puntos]
- Total [25 puntos]**
-

**Matemáticas: Análisis y Enfoques**
Nivel Medio
Prueba 1

Examen de muestra

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas de **Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

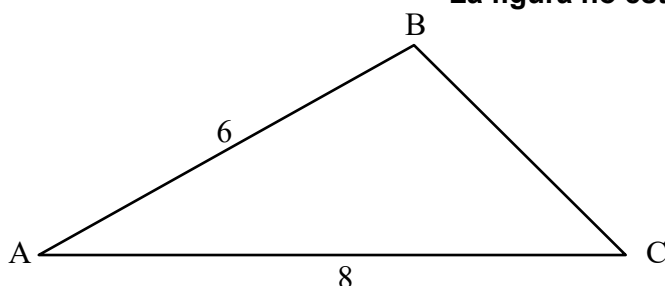
Section A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente figura muestra el triángulo ABC, siendo $AB = 6$ y $AC = 8$.

La figura no está dibujada a escala



- (a) Sabiendo que $\cos \hat{A} = \frac{5}{6}$, halle el valor del $\sin \hat{A}$. [3]
- (b) Halle el área del triángulo ABC. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 5]

Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,6$.
Halle $P(A | B)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 5]

(a) Muestre que $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 = 8n^2 + 2$, donde $n \in \mathbb{Z}$. [2]

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, pruebe que la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualesquiera es par. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 5]

Sea $f'(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Sabiendo que $f(0) = 5$, halle $f(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 5]

Las funciones f y g se definen del siguiente modo $f(x) = \frac{x+3}{4}$ y $g(x) = 8x + 5$.

(a) Muestre que $(g \circ f)(x) = 2x + 11$. [2]

(b) Sabiendo que $(g \circ f)^{-1}(a) = 4$, halle el valor de a . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 8]

(a) Muestre que $\log_9 (\cos 2x + 2) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$. [3]

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, resuelva $\log_3 (2 \operatorname{sen} x) = \log_9 (\cos 2x + 2)$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



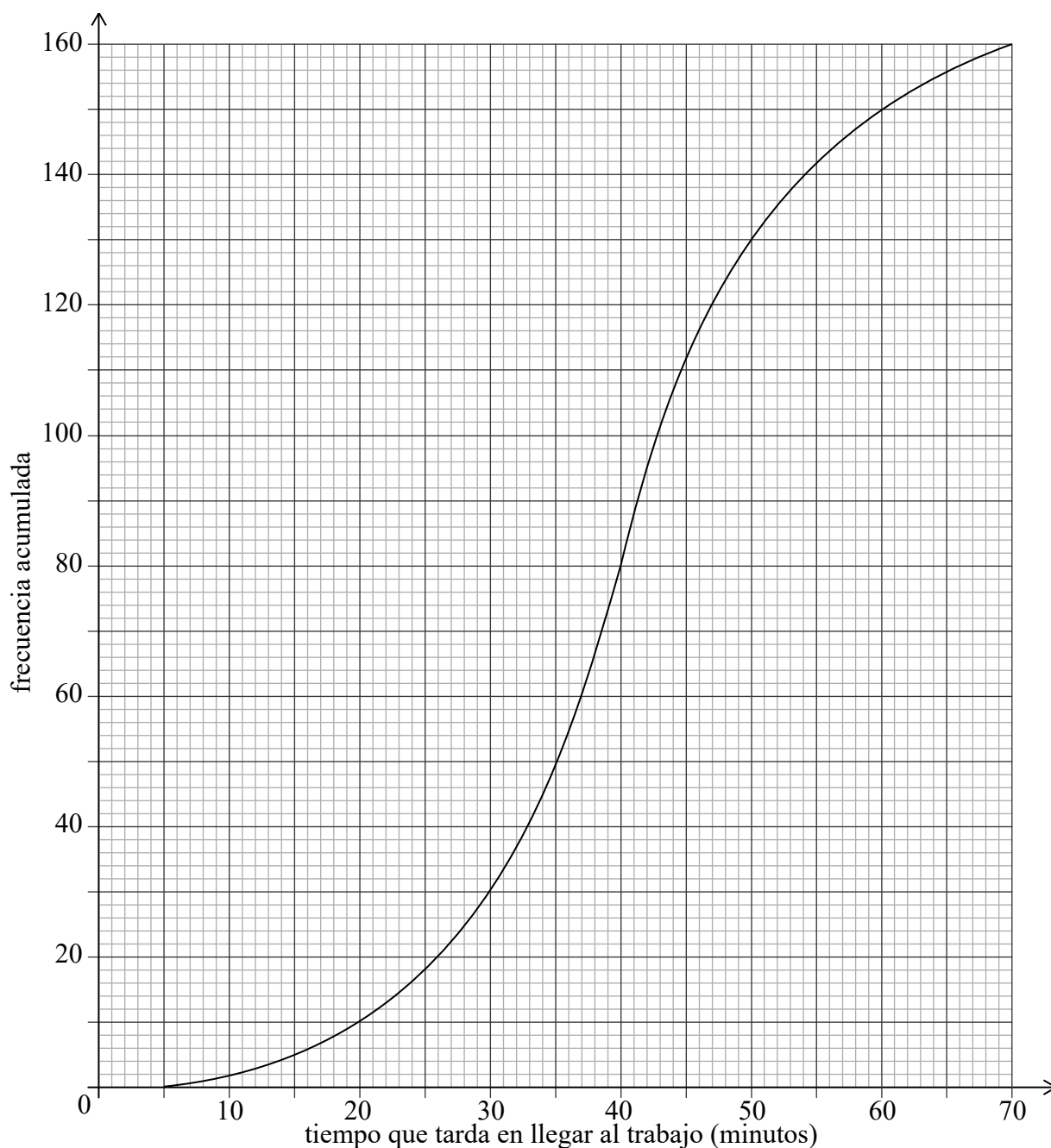
No escriba soluciones en esta página.

Section B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 15]

Una gran empresa decidió hacer una encuesta entre 160 empleados suyos para averiguar cuánto tiempo tardan en llegar al trabajo en un día dado. Los resultados de la encuesta se muestran en el siguiente diagrama de frecuencias acumuladas.



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



12EP08

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

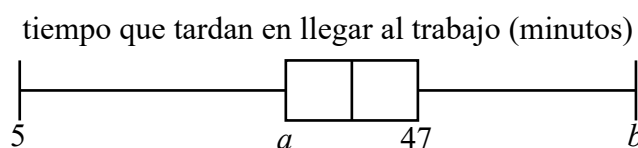
(a) Halle la mediana (en minutos) del tiempo que tardan en llegar al trabajo. [2]

(b) Halle el número de empleados que tardan en llegar al trabajo un tiempo que está a menos de 15 minutos de la mediana. [3]

Únicamente el 10% de los empleados tardaron más de k minutos en llegar al trabajo.

(c) Halle el valor de k . [3]

Los resultados de la encuesta también se pueden representar mediante el siguiente diagrama de caja y bigotes.



(d) Escriba el valor de b . [1]

(e) (i) Halle el valor de a .

(ii) A partir de lo anterior, halle el rango intercuartil. [4]

Los tiempos de viaje al trabajo que son menores que p minutos se consideran valores atípicos.

(f) Halle el valor de p . [2]



No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 16]

Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 17$.

(a) Halle $f'(x)$. [2]

El gráfico de f tiene tangentes horizontales en los puntos donde $x = a$ y $x = b$, $a < b$.

(b) Halle el valor de a y el valor de b . [3]

(c) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, explique por qué el gráfico de f tiene un punto máximo local en $x = a$. [2]

(d) (i) Halle $f''(b)$.

(ii) A partir de lo anterior, utilice la respuesta que dio en el apartado (d)(i) para mostrar que el gráfico de f tiene un punto mínimo local en $x = b$. [4]

La normal al gráfico de f en $x = a$ y la tangente al gráfico de f en $x = b$ se cortan en el punto (p, q) .

(e) Halle el valor de p y el valor de q . [5]



No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 16]

Sea $f(x) = \frac{\ln 5x}{kx}$, donde $x > 0$, $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Muestre que $f'(x) = \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$. [3]

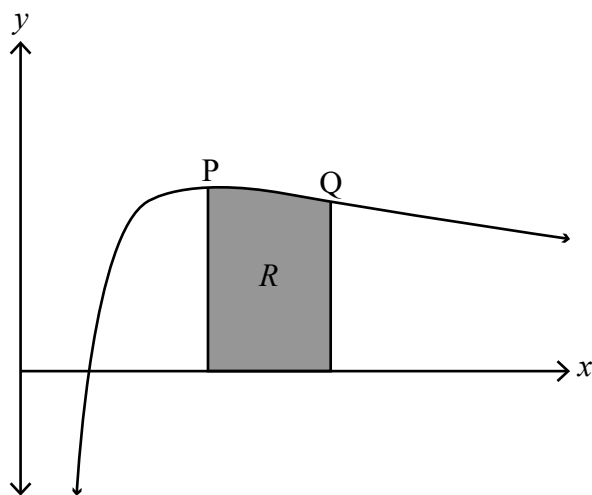
El gráfico de f tiene exactamente un máximo (el punto P).

(b) Halle la coordenada x de P. [3]

La derivada segunda de f viene dada por $f''(x) = \frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3}$. El gráfico de f tiene exactamente un punto de inflexión (Q).

(c) Muestre que la coordenada x de Q es $\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}$. [3]

La región R está delimitada por el gráfico de f , el eje x y las rectas verticales que pasan por el máximo P y por el punto de inflexión Q, respectivamente.



(d) Sabiendo que el área de R es igual a 3, halle el valor de k . [7]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



12EP12

Esquema de calificación

Examen de muestra

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Medio

Prueba 1

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*) ; a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

*Puntúe cada pregunta y cada apartado utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1**, **A2**.*

2 Puntos de método y puntos de respuesta/precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio (el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) y hay que puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si es que se ha concedido alguno).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: «se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**».
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea, se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2**, **N3**, etc., **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontremos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el procedimiento **correcto** (razonamiento seguido y cálculos realizados) o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento se haya **incluido por escrito explícitamente**.

4 Puntuaciones de arrastre de error (solo se aplican / se conceden después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés follow-through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados **posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **el alumno tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (es decir, los cálculos/razonamientos que ha seguido); no basta con que haya dado una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta que dio en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido en el apartado anterior la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de $r > 1$ para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizá estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la respuesta correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos dados en el enunciado de la pregunta, esto se considera un «error de lectura» (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar datos suyos (es decir, extraídos de su propio desarrollo), eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando el alumno ha incluido el desarrollo del ejercicio (cálculos y/o razonamientos). En aquellas preguntas de calculadora donde el alumno no ha incluido el desarrollo de la pregunta y ha dado además una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que lo que ha sucedido es que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

6 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar conforme a lo que indica el esquema de calificación.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos
MÉTODO 1,
MÉTODO 2, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN.**

7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

8 Precisión de las respuestas

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, en el esquema de calificación se incluirá un punto por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.*»

9 Calculadoras

No se permite el uso de calculadoras. El uso de cualquier tipo de calculadora durante la Prueba 1 se considera conducta fraudulenta y, como consecuencia de ello, no se le concederá al alumno ninguna calificación final. Si se topa con un ejercicio que sugiera que el alumno pudiera haber utilizado algún tipo de calculadora, siga por favor los procedimientos establecidos para abordar la conducta fraudulenta. Ejemplos: haber hallado un ángulo a partir de una razón trigonométrica de 0,4235.

Sección A

1. (a) por un enfoque válido donde se utilice la relación fundamental $(\cos^2 + \sin^2 = 1)$ (M1)
- $$\sin^2 A + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 \text{ (o equivalente)} \quad \text{(A1)}$$
- $$\sin A = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad \text{A1}$$
- [3 puntos]
- (b) $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{11}}{6}$ (o equivalente) (A1)
- $$\text{área} = 4\sqrt{11} \quad \text{A1}$$
- [2 puntos]
- Total [5 puntos]
2. por intentar sustituir los valores en $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (M1)
- Nota:** Acepte el uso de diagramas de Venn u otro método válido.
- $$0,6 = 0,5 + 0,4 - P(A \cap B) \quad \text{(A1)}$$
- $$P(A \cap B) = 0,3 \text{ (incluido en algún lugar de la pregunta, no necesariamente aquí)} \quad \text{A1}$$
- por intentar sustituir los valores en $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (M1)
- $$= \frac{0,3}{0,4}$$
- $$P(A|B) = 0,75 \left(= \frac{3}{4} \right) \quad \text{A1}$$
- Total [5 puntos]

3. (a) por tratar de desarrollar el miembro de la izquierda (M1)
 Miembro de la izda. = $(4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1)$ A1
 $= 8n^2 + 2$ (= Miembro de la dcha.) AG
 [2 puntos]

(b) **MÉTODO 1**

- por darse cuenta de que $2n - 1$ y $2n + 1$ representan dos enteros impares consecutivos (para $n \in \mathbb{Z}$) R1
 $8n^2 + 2 = 2(4n^2 + 1)$ A1
 una razón válida; *p. ej.*, divisible entre 2 (2 es un factor) R1
 así pues, la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualesquiera es par AG
 [3 puntos]

MÉTODO 2

- por darse cuenta, *p. ej.*, de que n y $n + 2$ representan dos enteros impares consecutivos (para $n \in \mathbb{Z}$) R1
 $n^2 + (n + 2)^2 = 2(n^2 + 2n + 2)$ A1
 una razón válida; *p. ej.*, divisible entre 2 (2 es un factor) R1
 así pues, la suma de los cuadrados de dos números enteros impares consecutivos cualesquiera es par AG
 [3 puntos]

Total [5 puntos]

4. por intentar integrar (M1)

$$u = 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x$$

$$\int \frac{8x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}} du \quad (A1)$$

O BIEN

$$= 4\sqrt{u} (+C) \quad A1$$

O BIEN

$$= 4\sqrt{2x^2 + 1} (+C) \quad A1$$

POR LO TANTO

por sustituir correctamente en **su** función integrada (tiene que haber incluido la C) (M1)

$$5 = 4 + C \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = 4\sqrt{2x^2 + 1} + 1 \quad A1$$

Total [5 puntos]

5. (a) por tratar de hacer la composición de funciones **M1**
 por sustituir correctamente $g\left(\frac{x+3}{4}\right) = 8\left(\frac{x+3}{4}\right) + 5$ **A1**
 $(g \circ f)(x) = 2x + 11$ **AG**
[2 puntos]
- (b) por tratar de sustituir el 4 (aquí o en otro lugar de la pregunta) **(M1)**
 la ecuación correcta $a = 2 \times 4 + 11$ **(A1)**
 $a = 19$ **A1**
[3 puntos]

Total [5 puntos]

6. (a) por tratar de utilizar la regla de cambio de base **M1**
 $\log_9(\cos 2x + 2) = \frac{\log_3(\cos 2x + 2)}{\log_3 9}$ **A1**
 $= \frac{1}{2} \log_3(\cos 2x + 2)$ **A1**
 $= \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$ **AG**
[3 puntos]
- (b) $\log_3(2 \operatorname{sen} x) = \log_3 \sqrt{\cos 2x + 2}$
 $2 \operatorname{sen} x = \sqrt{\cos 2x + 2}$ **M1**
 $4 \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x + 2$ (o equivalente) **A1**
 por utilizar $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ **(M1)**
 $6 \operatorname{sen}^2 x = 3$
 $\operatorname{sen} x = (\pm) \frac{1}{\sqrt{2}}$ **A1**
 $x = \frac{\pi}{4}$ **A1**

Nota: Conceda **A0** si ha incluido alguna otra solución, además de $x = \frac{\pi}{4}$.

[5 puntos]

Total [8 puntos]

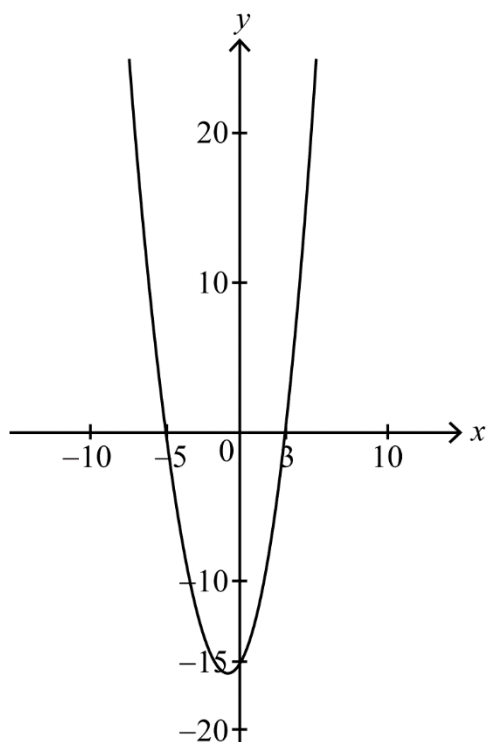
Sección B

7. (a) por dar pruebas de haber buscado la posición correspondiente a la mediana (**M1**)
el 80.º empleado
40 minutos **A1**
[2 puntos]
- (b) por un intento válido de hallar el intervalo (25–55) **(M1)**
18 (empleados), 142 (empleados) **A1**
124 **A1**
[3 puntos]
- (c) por haberse dado cuenta de que hay 16 empleados en ese
10% superior **(M1)**
144 empleados tardan más de k minutos **(A1)**
 $k = 56$ **A1**
[3 puntos]
- (d) $b = 70$ **A1**
[1 punto]
- (e) (i) por darse cuenta de que a es el valor correspondiente al primer cuartil **(M1)**
40 empleados
 $a = 33$ **A1**
- (ii) $47 - 33$ **(M1)**
rango intercuartil = 14 **A1**
[4 puntos]
- (f) por tratar de hallar $1,5 \times$ su rango intercuartil **(M1)**
 $33 - 21$
12 **(A1)**
[2 puntos]
- [Total 15 puntos]**
8. (a) $f'(x) = x^2 + 2x - 15$ **(M1)A1**
[2 puntos]
- (b) por razonar correctamente que $f'(x) = 0$ (visto aquí o en algún otro
lugar de la pregunta) **(M1)**
 $x^2 + 2x - 15 = 0$
por un enfoque válido para resolver la ecuación cuadrática **M1**
 $(x - 3)(x + 5)$, fórmula de la solución de una ecuación de segundo grado
valores correctos para x
3, -5
valores correctos para a y b
 $a = -5$ y $b = 3$ **A1**
[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 8 continuación

(c) (i)



A1

(ii) la derivada primera cambia de positiva a negativa en $x = a$

A1

así pues, el máximo local está en $x = a$

AG

[2 puntos]

(d) (i) $f''(x) = 2x + 2$

A1

por sustituir **su** valor de b en **su** derivada segunda

(M1)

$$f''(3) = 2 \times 3 + 2$$

$$f''(b) = 8$$

(A1)

(ii) $f''(b)$ es positiva, con lo que el gráfico es “cóncavo hacia arriba”

R1

así pues, el mínimo local está en $x = b$

AG

[4 puntos]

(e) la normal a f en $x = a$ es $x = -5$ (visto aquí o en algún otro lugar de la pregunta)

(A1)

por tratar de hallar la coordenada y correspondiente a su valor de b

(M1)

$$f(3) = -10$$

(A1)

la tangente en $x = b$ tiene por ecuación $y = -10$ (visto aquí o en algún otro lugar de la pregunta)

A1

el punto donde se cortan es $(-5, -10)$

$$p = -5 \text{ y } q = -10$$

A1

[5 puntos]

[Total 16 puntos]

9. (a) por tratar de utilizar la regla del cociente
por sustituir correctamente en la regla del cociente

(M1)

$$f'(x) = \frac{5kx\left(\frac{1}{5x}\right) - k \ln 5x}{(kx)^2} \quad (\text{o equivalente})$$

A1

$$= \frac{k - k \ln 5x}{k^2 x^2}, (k \in \mathbb{R}^+)$$

A1

$$= \frac{1 - \ln 5x}{kx^2}$$

AG

[3 puntos]

- (b) $f'(x) = 0$

M1

$$\frac{1 - \ln 5x}{kx^2} = 0$$

$$\ln 5x = 1$$

(A1)

$$x = \frac{e}{5}$$

A1

[3 puntos]

- (c) $f''(x) = 0$

M1

$$\frac{2 \ln 5x - 3}{kx^3} = 0$$

$$\ln 5x = \frac{3}{2}$$

A1

$$5x = e^{\frac{3}{2}}$$

A1

así pues, el punto de inflexión está en $x = \frac{1}{5} e^{\frac{3}{2}}$

AG

[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 9 continuación

(d) por tratar de integrar **(M1)**

$$u = \ln 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln 5x}{kx} dx = \frac{1}{k} \int u \, du \quad \text{A1}$$

O BIEN

$$= \frac{u^2}{2k} \quad \text{A1}$$

$$\text{así pues, } \frac{1}{k} \int_1^{\frac{3}{2}} u \, du = \left[\frac{u^2}{2k} \right]_1^{\frac{3}{2}} \quad \text{A1}$$

O BIEN

$$= \frac{(\ln 5x)^2}{2k} \quad \text{A1}$$

$$\text{así pues, } \int_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \frac{\ln 5x}{kx} dx = \left[\frac{(\ln 5x)^2}{2k} \right]_{\frac{e}{5}}^{\frac{1}{5}e^{\frac{3}{2}}} \quad \text{A1}$$

POR LO TANTO

$$= \frac{1}{2k} \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{5}{8k} \quad \text{A1}$$

por igualar **su** expresión del área a 3 **M1**

$$\frac{5}{8k} = 3$$

$$k = \frac{5}{24} \quad \text{A1}$$

[7 puntos]

Total [16 puntos]

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Medio

Prueba 2

Examen de muestra

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas de **Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

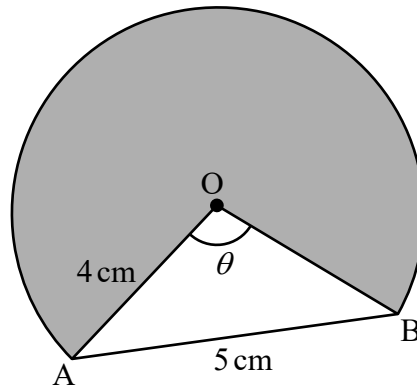


Sección A

[illegible]

2. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra una parte de un círculo de centro O y radio igual a 4 cm.



La cuerda AB mide 5 cm de longitud y $\angle AOB = \theta$.

(a) Halle el valor de θ y dé la respuesta en radianes.

[3]

(b) Halle el área de la región sombreada.

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Puntuación máxima: 6]

El 1 de enero de 2020, Laurie invierte $P\$$ en una cuenta que ofrece un tipo de interés nominal anual del $5,5\%$, compuesto **trimestralmente**.

La cantidad de dinero que Laurie tiene en la cuenta **al final de cada año** sigue una progresión geométrica de razón común, r .

- (a) Halle el valor de r ; dé la respuesta redondeando a cuatro cifras significativas. [3]

Laurie no hace ningún otro ingreso en esa cuenta ni tampoco saca dinero de ella.

- (b) Halle el año en el que la cantidad de dinero que tiene Laurie en la cuenta será el doble de la cantidad que invirtió. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 6]

Un dado no equilibrado de seis caras está hecho de tal modo que la probabilidad de sacar un “seis” es $\frac{7}{10}$.

Se tira este dado cinco veces. Halle la probabilidad de sacar:

(a) Como mucho tres “seises”. [3]

(b) El tercer “seis” a la quinta tirada. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 5]

La siguiente tabla muestra las notas que han obtenido siete alumnos en dos exámenes de matemáticas distintos.

Examen 1 (x)	15	23	25	30	34	34	40
Examen 2 (y)	20	26	27	32	35	37	35

Sea L_1 la recta de regresión de x sobre y . La ecuación de la recta L_1 se puede escribir de la forma $x = ay + b$.

(a) Halle el valor de a y el valor de b . [2]

Sea L_2 la recta de regresión de y sobre x . Las rectas L_1 y L_2 pasan por un mismo punto de coordenadas (p, q) .

(b) Halle el valor de p y el valor de q . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 7]

El desplazamiento (s , en centímetros) de una partícula respecto al origen, O, en el instante t segundos viene dado por $s(t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq 5$.

- (a) Halle la distancia máxima de la partícula respecto a O. [3]
- (b) Halle la aceleración de la partícula en el instante en el que cambia de sentido por primera vez. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

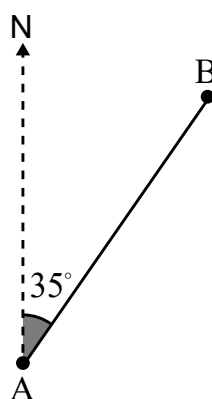
Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 16]

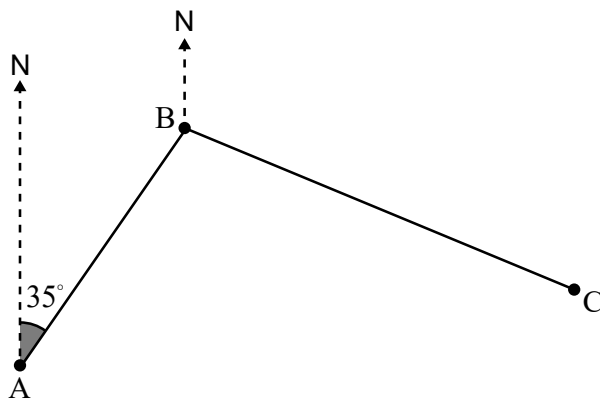
Adam sale de excursión desde su campamento, situado en el punto A. Camina durante 45 minutos a una velocidad promedio de 4,2 km/h con rumbo 035° respecto al campamento, hasta que se para a hacer un descanso en el punto B.

(a) Halle la distancia que hay entre el punto A y el punto B.

[2]



Adam sale del punto B siguiendo con rumbo 114° y camina una distancia de 4,6 km hasta que alcanza el punto C.



(b) (i) Muestre que $\hat{ABC}$ mide 101° .

(ii) Halle la distancia que hay entre el campamento y el punto C.

[5]

(c) Halle $\hat{BCA}$.

[3]

Jacob, que es un amigo de Adam, quiere caminar directamente desde el campamento hasta encontrarse con Adam en el punto C.

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

- (d) Halle el rumbo que tiene que seguir Jacob para llegar hasta el punto C. [3]

Jacob camina a una velocidad promedio de 3,9 km/h.

- (e) Halle, redondeando al número entero de minutos más próximo, el tiempo que tarda Jacob en alcanzar el punto C. [3]

8. [Puntuación máxima: 15]

La longitud (X mm) de una determinada especie de concha marina sigue una distribución normal, de media 25 y varianza, σ^2 .

La probabilidad de que X sea menor que 24,15 es igual a 0,1446.

- (a) Halle $P(24,15 < X < 25)$. [2]

- (b) (i) Halle σ ; es decir, la desviación típica de X .

- (ii) A partir de lo anterior, halle la probabilidad de que una concha marina elegida al azar mida más de 26 mm de largo. [5]

En una playa dada, se recoge una muestra aleatoria compuesta por 10 conchas marinas. Sea Y el número de conchas marinas que miden más de 26 mm de largo.

- (c) Halle $E(Y)$. [3]

- (d) Halle la probabilidad de que exactamente tres de estas conchas marinas midan más de 26 mm de largo. [2]

Una concha marina elegida al azar mide menos de 26 mm de largo.

- (e) Halle la probabilidad de que mida entre 24,15 mm y 25 mm de largo. [3]



No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 13]

Considere una función f , tal que $f(x) = 5,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x+1)\right) + b$, $0 \leq x \leq 10$, $b \in \mathbb{R}$.

(a) Halle el período de f . [2]

La función f tiene un máximo local en el punto $(2; 21,8)$ y un mínimo local en $(8; 10,2)$.

(b) (i) Halle el valor de b .

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de $f(6)$. [4]

Una segunda función g viene dada por $g(x) = p \sin\left(\frac{2\pi}{9}(x-3,75)\right) + q$, $0 \leq x \leq 10$; $p, q \in \mathbb{R}$.

La función g pasa por los puntos $(3; 2,5)$ y $(6; 15,1)$.

(c) Halle el valor de p y el valor de q . [5]

(d) Halle para qué valor de x la diferencia entre las dos funciones es máxima. [2]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



12EP11

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



12EP12

Esquema de calificación

Examen de muestra

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Medio

Prueba 2

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*) ; a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- AG** Respuesta dada (del inglés *Answer Given*) en el propio enunciado de la pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

*Puntúe cada pregunta y cada apartado utilizando las anotaciones y conforme a lo que se indica en el esquema de calificación; p. ej., **M1**, **A2**.*

2 Puntos de método y puntos de respuesta/precisión

- **No** conceda automáticamente la máxima puntuación sólo porque la respuesta dada sea correcta; se **debe** analizar todo el desarrollo del ejercicio (el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) y hay que puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- Por lo general, no se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de los puntos **M** precedentes (si es que se ha concedido alguno).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que: «se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**».
- Cuando aparecen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea, se puede conceder de manera independiente del resto; así pues, si el primer valor es incorrecto pero los dos siguientes son correctos se ha de conceder **A0A1A1**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique **M2**, **N3**, etc., **no** divida las puntuaciones a menos que se haya incluido una nota al respecto.
- Una vez que vea en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore todos los cálculos/razonamientos correctos subsiguientes. Sin embargo, si los cálculos/razonamientos subsiguientes revelan una falta de comprensión matemática, en ese caso no conceda el **A1** final. Una excepción a esta regla pueden ser las respuestas numéricas donde después de un valor exacto correcto encontremos un valor decimal incorrecto. No obstante, si el decimal incorrecto se “arrastra” (es decir, se utiliza luego en un apartado posterior) y ahí se muestra un procedimiento correcto con arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*), conceda los puntos **FT** que resulten apropiados pero, a cambio, no conceda el **A1** final en ese apartado.

Ejemplos

	Respuesta correcta incluida	Desarrollo adicional incluido	Acción
1.	$8\sqrt{2}$	5,65685... (valor decimal incorrecto)	Conceda el A1 final (ignore el desarrollo adicional que se ha incluido posteriormente)
2.	$\frac{1}{4}\sin 4x$	$\sin x$	No conceda el A1 final
3.	$\log a - \log b$	$\log(a - b)$	No conceda el A1 final

3 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran **entre paréntesis; p. ej., (M1)**. Solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el procedimiento **correcto** (razonamiento seguido y cálculos realizados) o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la línea siguiente.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis sólo se pueden conceder cuando el procedimiento se haya **incluido por escrito explícitamente**.

4 Puntuaciones de arrastre de error (solo se aplican / se conceden después de haberse cometido un error)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés follow-through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en **uno de los apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados **posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **el alumno tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (es decir, los cálculos/razonamientos que ha seguido); no basta con que haya dado una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta que dio en el apartado anterior. Sin embargo, si un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta final que se dé (es decir, si no se espera que el alumno incluya desarrollo alguno), en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí que se pueden conceder puntos **M** si resulta pertinente.
- Si a causa del error cometido en el apartado anterior la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos **FT** si lo considera oportuno.
- Si dicho error conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, el uso de $r > 1$ para la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Es posible que en el esquema de calificación se utilice la palabra «su(s)» en una descripción; con esto se quiere indicar que los alumnos quizá estén utilizando un valor incorrecto.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si un alumno comete un error en un apartado pero luego obtiene la respuesta correcta en apartados subsiguientes, conceda las puntuaciones que sean oportunas a no ser que en el enunciado de la pregunta se diga «A partir de lo anterior,...». A menudo es posible utilizar en los apartados subsiguientes un enfoque diferente que no dependa de la respuesta hallada en los apartados anteriores.

5 Errores de lectura

*Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos dados en el enunciado de la pregunta, esto se considera un «error de lectura» (**MR**, del inglés mis-read). Aplique a esa pregunta una penalización **MR** de 1 punto.*

- Si a causa del error de lectura (**MR**) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si lo considera oportuno.
- Si dicho **MR** conduce a un resultado inadecuado o imposible (p. ej., una probabilidad mayor que 1, $\sin \theta = 1,5$, un valor no entero allí donde hay que dar uno entero, etc.), no conceda el/los puntos que hay asignados a la respuesta final.
- Si el alumno comete un error al copiar datos suyos (es decir, extraídos de su propio desarrollo), eso **no** es un error de lectura, sino un error ordinario.
- La penalización por error de lectura (**MR**) solo se puede aplicar cuando el alumno ha incluido el desarrollo del ejercicio (cálculos y/o razonamientos). En aquellas preguntas de calculadora donde el alumno no ha incluido el desarrollo de la pregunta y ha dado además una respuesta incorrecta, los examinadores **no** deberían inferir que lo que ha sucedido es que el alumno ha leído/copiado mal los valores de la calculadora.

6 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de otros métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar conforme a lo que indica el esquema de calificación.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, éstos aparecen señalados mediante los encabezamientos
MÉTODO 1,
MÉTODO 2, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN.**

7 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes suelen aparecer escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos no suelen incluir en los exámenes) suelen aparecer escritas entre paréntesis. La puntuación asignada se ha de conceder tanto si el alumno da la respuesta en la forma que precede al paréntesis como si utiliza la forma que aparece entre paréntesis (de haberse incluido alguna de las dos).

8 Precisión de las respuestas

Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, en el esquema de calificación se incluirá un punto por dar la respuesta con la precisión requerida. Hay dos tipos de errores de precisión, y el punto de respuesta final no se debería conceder si el alumno ha cometido alguno de estos errores.

- **Errores de redondeo:** se aplica únicamente a las respuestas finales, no a los pasos intermedios del desarrollo.
- **Grado de precisión:** Cuando no quede especificado en el enunciado de la pregunta, a las respuestas finales se les ha de aplicar la regla general, que dice lo siguiente: «*Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.*»

9 Calculadoras

Para la prueba 2 sí que se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadoras que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico o las dotadas de un sistema algebraico computacional.

Notación de calculadora

La guía de la asignatura dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; en ningún caso está permitido usar notación de calculadora.

No acepte ninguna respuesta final que se haya escrito utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el desarrollo del ejercicio.

Sección A

1. (a) $\frac{4}{3}\pi(12,7)^3$ (o equivalente) A1
 $8580,24$ (A1)
 $V = 8,58 \times 10^3$ A1
[3 puntos]
- (b) por darse cuenta de que el volumen del cono es el mismo que el volumen de su esfera (M1)
 $\frac{1}{3}\pi r^2(14,8) = 8580,24$ (o equivalente) A1
 $r = 23,529$
 $r = 24$ (cm) tras redondear a 2 cifras significativas A1
[3 puntos]
- Total [6 puntos]**
2. (a) **MÉTODO 1**
 por tratar de utilizar el teorema del coseno (M1)
 $\cos \theta = \frac{4^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 4}$ (o equivalente) A1
 $\theta = 1,35$ A1
[3 puntos]
- MÉTODO 2**
 por tratar de dividir el triángulo AOB en dos triángulos rectángulos congruentes (M1)
 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2,5}{4}$ A1
 $\theta = 1,35$ A1
[3 puntos]
- (b) por tratar de hallar el área de la región sombreada (M1)
 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times (2\pi - 1,35\dots)$ A1
 $= 39,5$ (cm²) A1
[3 puntos]
- Total [6 puntos]**
3. (a) $\left(1 + \frac{5,5}{4 \times 100}\right)^4$ (M1)(A1)
 $1,056$ A1
[3 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Pregunta 3: continuación

(b) **O BIEN**

$$2P = P \times \left(1 + \frac{5,5}{100 \times 4}\right)^{4n} \quad \text{O BIEN} \quad 2P = P \times (\text{su } (a))^m \quad (M1)(A1)$$

Nota: Conceda **(M1)** por sustituir los valores en la fórmula del valor de la inversión.
Conceda **(A1)** por haberlos sustituido correctamente.

O BIEN

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 5,5$$

$$P/A = 4$$

$$C/Y = 4$$

$$n = 50,756\dots$$

(M1)(A1)

O BIEN

$$PV = \pm 1$$

$$FV = \mp 2$$

$$I\% = 100(\text{su } (a) - 1)$$

$$P/A = 1$$

$$C/Y = 1$$

(M1)(A1)

POR LO TANTO

$\Rightarrow$ 12,7 años

Laurie conseguirá tener el doble de la cantidad invertida durante el año 2032 **A1**

[3 puntos]

Total [6 puntos]

4. (a) por reconocer la distribución binomial

(M1)

$$X \sim B(5; 0,7)$$

por tratar de hallar $P(X \leq 3)$

M1

$$= 0,472 (= 0,47178)$$

A1

[3 puntos]

(b) por darse cuenta de que hacen falta 2 seises en 4 tiradas

(M1)

$$P(3\text{er seis en la } 5.\text{ª tirada}) = \left[\binom{4}{2} \times (0,7)^2 \times (0,3)^2 \right] \times 0,7 (= 0,2646 \times 0,7)$$

A1

$$= 0,185 (= 0,18522)$$

A1

[3 puntos]

Total [6 puntos]

5. (a) $a = 1,29$ y $b = -10,4$ **A1A1**
[2 puntos]
- (b) por darse cuenta de que las dos rectas pasan por el punto correspondiente a la media **(M1)**
 $p = 28,7$, $q = 30,3$ **A2**
[3 puntos]
- Total [5 puntos]**
-
6. (a) por utilizar un gráfico para hallar las coordenadas del mínimo local **(M1)**
 $s = -16,513...$ **(A1)**
la distancia máxima es 16,5 cm (a la izquierda de O) **A1**
[3 puntos]
- (b) Por tratar de hallar el instante en el que la partícula cambia de sentido **(M1)**
p. ej., considerando el primer máximo que hay en el gráfico de s
o el primer punto de corte con el eje t en el gráfico de s' **(A1)**
 $t = 1,51986...$
- por tratar de hallar la pendiente de s' para su valor de t , $s''(1,51986...)$ **(M1)**
 $= -8,92 \text{ (cm/s}^2\text{)}$ **A1**
[4 puntos]
- Total [7 puntos]**

Sección B

7. (a) $\frac{4,2}{60} \times 45$ **A1**
 $AB = 3,15 \text{ (km)}$ **A1**
[2 puntos]
- (b) (i) $66^\circ \text{ o } (180 - 114)$ **A1**
 $35 + 66$ **A1**
 $\hat{ABC} = 101^\circ$ **AG**
- (ii) por tratar de utilizar el teorema del coseno **(M1)**
 $AC^2 = 3,15^2 + 4,6^2 - 2 \times 3,15 \times 4,6 \cos 101^\circ$ (o equivalente) **A1**
 $AC = 6,05 \text{ (km)}$ **A1**
[5 puntos]
- (c) por un enfoque válido para hallar el ángulo BCA **(M1)**
p. ej., el teorema del seno
 por sustituir correctamente los valores en el teorema del seno **A1**
p. ej., $\frac{\sin(\hat{BCA})}{3,15} = \frac{\sin 101}{6,0507...}$
 $\hat{BCA} = 30,7^\circ$ **A1**
[3 puntos]
- (d) $\hat{BAC} = 48,267$ (visto aquí o en algún otro lugar de la pregunta) **A1**
 por un enfoque válido para hallar el rumbo correcto **(M1)**
p. ej., $48,267 + 35$
 $\text{rumbo} = 83,3^\circ$ (acepte 083°) **A1**
[3 puntos]
- (e) por tratar de utilizar la fórmula: $\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$ **M1**
 $\frac{6,0507}{3,9}$ o $0,065768 \text{ km/min}$ **(A1)**
 $t = 93 \text{ (minutos)}$ **A1**
[3 puntos]
- Total [16 puntos]**

8. (a) por tratar de utilizar la simetría de la curva de la distribución normal (M1)
p. ej., una figura, $0,5 - 0,1446$
 $P(24,15 < X < 25) = 0,3554$ A1
 [2 puntos]
- (b) (i) por utilizar la función inversa de la distribución normal para hallar la puntuación z (M1)
 $z = -1,0598$
 por sustituir correctamente $\frac{24,15 - 25}{\sigma} = -1,0598$ (A1)
 $\sigma = 0,802$ A1
- (ii) $P(X > 26) = 0,106$ (M1) A1
 [5 puntos]
- (c) por darse cuenta de que era probabilidad binomial (M1)
 $E(Y) = 10 \times 0,10621$ (A1)
 $= 1,06$ A1
 [3 puntos]
- (d) $P(Y = 3)$ (M1)
 $= 0,0655$ A1
 [2 puntos]
- (e) por darse cuenta de que era probabilidad condicionada por sustituir correctamente (M1)
 $\frac{0,3554}{1 - 0,10621}$ A1
 $= 0,398$ A1
 [3 puntos]
- Total [15 puntos]
9. (a) por utilizar un enfoque correcto A1
p. ej., $\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{\text{período}}$ (o equivalente)
 período = 12 A1
 [2 puntos]
- (b) (i) por utilizar un enfoque válido (M1)
p. ej., $\frac{\text{máx} + \text{mín}}{2}$ $b = \text{máx} - \text{amplitud}$
 $\frac{21,8 + 10,2}{2}$, o equivalente
 $b = 16$ A1

Pregunta 9: continuación

- (ii) por tratar de sustituir los valores en **su** función **(M1)**

$$5,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(6+1)\right) + 16$$

$$f(6) = 13,1$$

A1

[4 puntos]

- (c) por un intento válido de plantear un sistema de ecuaciones por dos ecuaciones correctas **(M1)**
A1

$$p \sin\left(\frac{2\pi}{9}(3-3,75)\right) + q = 2,5, \quad p \sin\left(\frac{2\pi}{9}(6-3,75)\right) + q = 15,1$$

por un intento válido de resolver el sistema de ecuaciones

$$p = 8,4; \quad q = 6,7$$

(M1)

A1A1

[5 puntos]

- (d) por tratar de utilizar $|f(x) - g(x)|$ para hallar la diferencia máxima **(M1)**
A1

$$x = 1,64$$

[2 puntos]

Total [13 puntos]